Matemáticas financieras

sostenibles y sustentables



Grupo de Investigaciones: HUNZAHUA
Grupo de Investigaciones: LLAMA

Escuela de Ciencias Administrativas, Contables, Económicas y de Negocios - ECACEN

Sello Editorial
Universidad Nacional
Abierta y a Distancia

MATEMÁTICAS FINANCIERAS SOSTENIBLES Y SUSTENTABLES

Autores
Aymer Román Barrera Novoa,
Luis Ángel Meneses Cerón,
Carlos Eduardo Cardozo Munar,
Juan Carlos Henao Henao,
Víctor Manuel Varela Rodríguez,
Arthur Giuseppe Serrato Cherres,
Dayra Ibeth Cabrera.
Andrés Riveros.

Grupo de Investigación: Grupo Hunzahua

Grupo Ilama

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA (UNAD)

Jaime Alberto Leal Afanador
Rector

Constanza Abadía García
Vicerrectora académica y de investigación

Leonardo Yunda Perlaza
Vicerrector de medios y mediaciones pedagógicas

Edgar Guillermo Rodríguez Díaz
Vicerrector de servicios a aspirantes, estudiantes y egresados

Leonardo Evemeleth Sánchez Torres
Vicerrector de relaciones intersistémicas e internacionales

Martha Viviana Vargas Galindo
Vicerrectora de inclusión social para el desarrollo regional y la proyección comunitaria

Sandra Rocío Mondragón Arévalo
Decana Escuela de Ciencias Administrativas Contables Económicas y de Negocios (ECACEN)

Juan Sebastián Chiriví Salomón
Líder Nacional del Sistema de Gestión de la Investigación (SIGI)

Martín Gómez Orduz
Líder Sello Editorial UNAD

Matemáticas financieras sostenibles y sustentables

Autores
Aymer Román Barrera Novoa, Luis Ángel Meneses Cerón, Carlos Eduardo Cardozo Munar, Juan Carlos Henao Henao, Víctor Manuel Varela Rodríguez, Arthur Giuseppe Serrato Cherres, Dayra Ibeth Cabrera y Andrés Riveros.

Grupo de Investigación: Hunzahua

ISBN:

e-ISBN:

Escuela de Ciencias Administrativas, Contables, Económicas y de Negocios - ECACEN

©Editorial
Sello Editorial UNAD
Universidad Nacional Abierta y a Distancia
Calle 14 sur No. 14-23

Bogotá, D.C.

Septiembre de 2026

Corrección de textos:
Diagramación: Olga L. Pedraza R.

Impresión:

Edición integral: Hipertexto–Netizen

Cómo citar este libro: Barrera Novoa, A. R., Meneses Cerón, L. Á., Cardozo Munar, C. E., Henao Henao, J. C., Varela Rodríguez, V. M., Serrato Cherres, A. G., Cabrera, D. I., y Riveros, A. (2026). *Matemáticas financieras sostenibles y sustentables*. Sello Editorial UNAD. DOI PENDIENTE

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons – Atribución – No comercial – Sin Derivar 4.0 internacional. **https://co.creativecommons.org/?page_id=13.**



Reseña del libro

Las matemáticas financieras son una herramienta esencial para cualquiera que busque entender el mundo de las inversiones, los préstamos o la gestión de finanzas personales y empresariales. En este contexto, el libro Matemáticas financieras sostenibles y sustentables, de la Red Internacional de Matemáticas Financieras liderada por la UNAD, se presenta como una propuesta sólida que busca desmitificar los complejos cálculos y conceptos que rigen el valor del dinero en el tiempo.

La Red Internacional de Matemáticas Financieras aborda la integración de algunos criterios ESG (del inglés Environmental, Social and Governance; en español, Ambientales, Sociales y de Gobernanza) en el desarrollo de planteamientos financieros tradicionales. Este texto comienza sentando las bases de las finanzas sostenibles, explicando por qué y cómo estos factores no financieros impactan en el rendimiento y el riesgo de las inversiones. Lo verdaderamente innovador es cómo se traducen estos conceptos cualitativos en modelos matemáticos tangibles.

La Red Internacional de Matemáticas Financieras logra estructurar el contenido de manera que tanto estudiantes como profesionales puedan seguir el hilo de los conceptos, desde los fundamentos más básicos hasta temas más avanzados. El libro arranca con una explicación clara del interés simple y compuesto, sentando las bases para lo que vendrá. A medida que avanza, se sumerge en el descuento, las anualidades (simples, anticipadas, diferidas) y el análisis de rentas y sistemas de amortización de préstamos (francés, alemán, americano), elementos cruciales para la toma de decisiones financieras.

Uno de los puntos más fuertes de esta obra es su enfoque verdaderamente práctico. Lejos de ser una mera colección de fórmulas, el libro se enriquece con una gran cantidad de ejemplos y ejercicios resueltos y propuestos. Esto permite al lector no solo comprender la teoría, sino también aplicarla en situaciones reales, reforzando el aprendizaje y construyendo confianza en el manejo de los cálculos. La claridad en la exposición de cada tema es notable, utilizando un lenguaje técnico, pero accesible, lo cual es fundamental en un área tan específica.

Sin embargo, como cualquier libro de texto, la profundidad en algunos temas avanzados podría sentirse un tanto limitada para aquellos que buscan un nivel de especialización muy alto en áreas como los derivados financieros complejos o modelos estocásticos. No obstante, para el público al que está dirigido (estudiantes de finanzas, economía, administración, contaduría y profesionales que necesitan una base sólida), el alcance es más que suficiente y muy bien logrado.

En conclusión, Matemáticas financieras sostenibles y sustentables, de la Red Internacional de Matemáticas Financieras, es una herramienta didáctica altamente recomendable. Es un recurso invaluable para quienes desean construir una base sólida en matemáticas financieras o refrescar sus conocimientos. Su combinación de teoría concisa, ejemplos abundantes y una metodología práctica lo convierte en un texto indispensable en la biblioteca de cualquier persona interesada en el análisis cuantitativo de las finanzas.

Reseña de los autores

Lo que distingue a esta publicación es precisamente su naturaleza multiautor. En lugar de ofrecer una perspectiva única, el libro presenta un mosaico de voces y especialidades. La Red Internacional de Matemáticas Financieras de la UNAD ha orquestado una sinfonía de conocimientos, reuniendo a investigadores líderes, éticos, economistas, administradores y futuristas.

Esta diversidad de autores asegura no solo un rigor académico en cada área, sino también una riqueza de enfoques que abordan tanto los beneficios prometedores como los dilemas complejos que las matemáticas financieras plantean a la sociedad.

El libro está estructurado de tal manera que, a pesar de las múltiples firmas, mantiene una coherencia temática impresionante. Cada autor logra comunicar ideas complejas de forma accesible, lo que hace que la obra sea valiosa tanto para especialistas como para un público general interesado en los análisis cuantitativos que nos brindan las matemáticas financieras. La calidad de la investigación es evidente, y la variedad de ejemplos y estudios de caso que se presentan a lo largo de los capítulos consolida la comprensión de los conceptos.

Una pequeña reseña del líder de la Red Internacional de Matemáticas Financieras de la UNAD: *el magíster Aymer Román Barrera Novoa se ha consolidado como una Figura relevante en el ámbito académico colombiano, particularmente en las áreas de matemáticas financieras, contabilidad y gestión económica. Su trabajo, gran parte del cual se canaliza a través de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia, demuestra un claro compromiso con la aplicación práctica del conocimiento y la formación de nuevos profesionales.*

Lo que define el aporte del magíster Barrera Novoa es su enfoque en la accesibilidad y la utilidad inmediata de conceptos complejos. Sus materiales, incluyendo publicaciones y numerosos videos educativos sobre matemáticas financieras, evidencian una metodología didáctica que busca desmitificar los cálculos y principios económicos. Esto es crucial para estudiantes y profesionales que requieren comprender desde el interés simple y compuesto hasta la evaluación de proyectos de inversión, sin perderse en abstracciones teóricas innecesarias.

Sus publicaciones, como el estudio sobre los «Conocimientos de gestión contable y financiera de los dignatarios de las juntas de acción comunal de Sogamoso», resaltan su interés en la aplicación del conocimiento financiero en contextos comunitarios y sociales. Este tipo de investigación no solo contribuye al acervo académico, sino que también ofrece herramientas prácticas para la mejora de la gestión de recursos a nivel local, un aspecto vital para el desarrollo socioeconómico.

Además, su análisis sobre temas macroeconómicos, entre ellos «¿cómo se ve nuestra economía en la actualidad?», y su incursión en el estudio del impacto de la migración venezolana en Boyacá, demuestran una capacidad para abordar desafíos contemporáneos con una perspectiva informada y rigurosa. Estas contribuciones evidencian una visión que va más allá de las fórmulas, buscando entender las implicaciones sociales y económicas de los fenómenos financieros.

En ese sentido, el magíster Aymer Román Barrera Novoa se distingue por su habilidad para conectar la teoría financiera con la realidad, haciendo que las matemáticas y la gestión económica sean herramientas comprensibles y aplicables. Su dedicación a la enseñanza y la investigación, con un énfasis en la utilidad práctica y el impacto social, lo convierte en un valioso referente para quienes buscan dominar los aspectos cuantitativos de las finanzas y la economía en Colombia.

Reseña del profesor Juan Carlos Henao Henao, Red Internacional de Matemáticas Financieras (UNAD). El magíster Juan Carlos Henao Henao se ha consolidado como un referente académico en Colombia, con una destacada trayectoria en las áreas de finanzas, así como en la formulación y evaluación de proyectos. Su labor en la Universidad Nacional Abierta y a Distancia y en

otras instituciones de educación superior ha sido clave para la formación de profesionales con una sólida base conceptual y una visión aplicada de los conocimientos financieros.

Una de las principales fortalezas del profesor Henao es su capacidad para traducir conceptos complejos en herramientas comprensibles y útiles para la toma de decisiones. Su enfoque pedagógico, reflejado en materiales didácticos como publicaciones y contenidos audiovisuales, ha permitido que estudiantes y profesionales accedan con claridad a temas como las matemáticas financieras, el análisis de inversiones y la gestión de proyectos, siempre desde una perspectiva práctica y contextualizada.

Entre sus investigaciones se destaca el *software* "Sistematización de las Ciencias Económicas y Administrativas", donado a la Universidad del Quindío de donde es egresado como Profesional en Administración Financiera, que evidencia su interés por llevar la educación financiera a todos los escenarios, con el propósito de contribuir al desarrollo social. De igual manera, su *Working Paper* "Opciones de apalancamiento financiero para la expansión de empresas del sector privado en Colombia" muestra su compromiso con el análisis crítico del apoyo para las empresas a través del apalancamiento financiero. En conjunto, el trabajo del magíster Henao se distingue por su vocación docente, su rigurosidad investigativa y su énfasis en la aplicabilidad del conocimiento. Su participación en espacios académicos, como la Red Internacional de Matemáticas Financieras de la UNAD, fortalece el propósito de democratizar la educación financiera y fomentar una comprensión más profunda de los desafíos económicos actuales.

Reseña del profesor Víctor Manuel Varela Rodríguez, Red Internacional de Matemáticas Financieras (UAN). El doctor Víctor Manuel Varela Rodríguez forma parte del Cuerpo Académico en Consolidación UAN-CA-299, Empresa, Educación y Tecnología en la Universidad Autónoma de Nayarit, México, cuenta con reconocimiento nacional como profesor con perfil deseable, avalado por la Secretaría de Educación Pública, y recientemente ha sido incorporado al Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores en México. Cuenta con publicaciones nacionales e internacionales enfocadas en estudios económicos y financieros de las micro y pequeñas empresas, aportando los hallazgos para propiciar cambios importantes en las finanzas de los micro y pequeños

empresarios. Cuenta con una amplia trayectoria académica en la formación de estudiantes de licenciatura y posgrado.

Reseña del profesor Arthur Giuseppe Serrato Cherres, Red Internacional de Matemáticas Financieras (UNAD). El doctor Arthur Serrato Cherres, en el ámbito educativo, es un docente destacado en diversas universidades del Perú, no solo impartiendo cátedra sobre finanzas, administración y otras materias, tanto a nivel de pregrado como en posgrado, también a través de publicaciones científicas de diversos campos como educación, administración, finanzas y regulación sobre el mercado de capitales, presentadas en prestigiosas revistas científicas. Las metodologías aplicadas por el doctor Serrato Cherres incentivan a diversos estudiantes a generar publicaciones científicas, creando así microequipos de investigación. Con respecto a su trayectoria profesional, presenta experiencia en gestión de procesos, calidad de servicios, análisis de datos y supervisión de empresas reguladas del sistema financiero y conexos. Asimismo, presta asesorías a empresas en la implementación de mejoras en sus procesos e implementación de investigación en servicios

Reseña del doctor Luis Ángel Meneses. Es Doctor en Administración de Negocios y Magíster en Finanzas Cuantitativas y se ha consolidado como un investigador y académico con un enfoque claro en temas de finanzas, economía y gestión empresarial. Su trabajo se destaca por la publicación de artículos en revistas científicas de alto impacto, como las indexadas en Scopus Q1, lo que indica una sólida calidad y relevancia en su investigación. Ha publicado numerosos artículos en revistas de prestigio; sus investigaciones abordan una variedad de temas, mostrando un interés en la aplicación de la teoría a problemas del mundo real. Entre sus trabajos se encuentran estudios sobre:

- La relación entre el gobierno corporativo y el desempeño financiero en empresas colombianas.
- El diseño de sistemas de costeo para la toma de decisiones en empresas de servicios.
- Análisis de eficiencia comparativa en mercados emergentes.

- La influencia de la sostenibilidad en el desempeño financiero de las empresas.

De igual forma, se caracteriza por una activa y relevante producción científica en el campo de las finanzas y la gestión, con un enfoque en temas de actualidad y aplicación práctica. siendo un profesional que contribuye significativamente a la investigación dentro del campo de las finanzas internacionales.

Reseña de la magíster Dayra Ibeth Cabrera. Administradora de empresas y magíster en Contabilidad y Finanzas, es una académica con afiliación verificada a la UNAD, coautora de un artículo en la *Revista Finanzas y Política Económica*, titulado «Valoración y riesgo crediticio en Colombia», publicado en 2011. Tiene experiencia en el ámbito de las finanzas y la economía, y ha participado en investigaciones en el campo de la valoración y el riesgo crediticio en el contexto colombiano. Además de ser docente, ha participado en el semillero de investigación SIDESGOP y es coautora de publicaciones que forman parte del Sello Editorial UNAD, coautora de un capítulo en el libro *Perspectivas e interacciones entre el mundo físico y virtual para los nuevos retos del desarrollo socioeconómico*, en el cual se abordan temas como la gestión empresarial, finanzas y desarrollo organizacional.

Reseña del magíster Andrés Riveros. Es profesor, investigador y experto en finanzas y negocios, con un fuerte enfoque en temas de economía digital y mercados emergentes, analizando el riesgo sistémico y el desempeño financiero en la industria bancaria, especialmente en el contexto de la pandemia de COVID-19, su trabajo se enfoca en el estudio de tendencias en la literatura sobre la adopción de la banca digital en economías emergentes. Ha investigado el impacto de la innovación financiera digital y el rendimiento financiero de la industria bancaria, ha utilizado este método para analizar grandes conjuntos de datos de publicaciones académicas sobre temas como la banca digital, ha publicado artículos en revistas científicas como *Sustainability, Social Sciences y Journal of Theoretical and Applied Electronic Commerce Research*.

Reseña del docente Carlos Eduardo Cardozo. Es Doctor en Administración Gerencial (Es Doctor en Administración Gerencial (título convalidado ante el Ministerio de Educación Nacional de Colombia) y Magíster en Administración

de Empresas con especialidad en Finanzas Corporativas (título convalidado ante el Ministerio de Educación Nacional de Colombia). Además, es Ingeniero Financiero (Matrícula Profesional n.º 25303-271619 del Consejo Profesional Nacional de Ingeniería, COPNIA) e Investigador Junior reconocido por el Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación (Minciencias).

Se desempeña como docente de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD), en la sede José Acevedo y Gómez (JAG), y actualmente también como docente de la Fundación Universitaria Compensar (Ucompensar). Cuenta con más de diez años de experiencia en docencia universitaria en las áreas contable, financiera y económica, con un enfoque pedagógico que integra la teoría y la práctica, orientado a fomentar el pensamiento crítico, la innovación y el desarrollo de competencias reales en el aula. Sus áreas de interés y experticia se centran en las ciencias empresariales, la economía y las finanzas.

Agradecimientos

La culminación de este libro, *Matemáticas financieras sostenibles y sustentables*, ha sido un viaje colaborativo, enriquecedor y, en ocasiones, desafiante. No habría sido posible sin la invaluable contribución y el apoyo de muchas personas y entidades a las que deseamos expresar nuestra más sincera gratitud.

En primer lugar, extendemos un profundo agradecimiento a cada uno de los coautores de esta obra. Su dedicación incansable, su pericia en sus respectivas áreas de especialización y su compromiso con la excelencia han sido pilares fundamentales. La diversidad de sus perspectivas y la riqueza de sus conocimientos han enriquecido cada capítulo, que, esperamos, resuene con nuestros lectores. Al magíster Aymer Román Barrera Novoa, al doctor Luis Ángel Meneses, al magíster Andrés Ricardo Riveros, al magíster Juan Carlos Henao, a la magíster Dayra Ibeth Cabrera, al doctor Arthur Serrato, al doctor Víctor Manuel Varela, al doctor Carlos Eduardo Cardozo Munar y a todos los demás que aportaron su talento, nuestra admiración y gratitud.

Agradecemos también al Sello Editorial de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD) por creer en este proyecto desde sus inicios y por proporcionar el apoyo editorial y técnico necesario para transformar nuestras ideas en este libro tangible. A nuestras familias y seres queridos, por su paciencia, comprensión y constante aliento durante las largas horas de investigación y escritura. Su apoyo incondicional fue una fuente de motivación vital.

Finalmente, a la comunidad académica y profesional de las finanzas y las matemáticas, de la cual formamos parte, por ser una fuente constante de inspiración y por el diálogo enriquecedor que impulsa el avance del conocimiento. Esperamos que este libro sirva como una herramienta útil y una referencia valiosa para estudiantes, profesionales y cualquier persona interesada en comprender el fascinante mundo de las matemáticas financieras.

Atentamente,
Los autores

Contenido

Prefacio **25**

Prólogo **27**

Introducción **29**

Capítulo 1.
Matemáticas financieras sostenibles y sustentables **35**

Objetivo 35
Alcance 36
Conceptos teóricos 36
Principios financieros: valor del dinero en el tiempo y equivalencia financiera 38
Interés simple e interés compuesto 40
Interés simple 41
Interés compuesto 43
Equivalencias financieras entre valor presente, valor futuro y series uniformes 46
Fórmula para hallar el valor futuro (VF) dado un valor presente (VP) 46
Fórmula para hallar el valor presente (VP) dado un valor futuro (VF) 47
Fórmula para hallar tasa de interés (i %), dado un valor presente (VP) y un valor futuro (VF) 48
Anualidad o renta o pago 48
Clases de anualidades o rentas uniformes 49
Diagrama de flujo económico 50
Importancia de los diagramas de flujo 51
Referencias 53

Capítulo 2.
Conversión de tasas de interés y equivalencia financiera **55**

Introducción 55
Conversión de tasas 56
Conceptos generales 56

Conversión entre tasas de interés 61
Tasas indexadas y deflactadas 67
Introducción 67
Objetivo 67
Tasas indexadas 68
Fórmula y cálculo 68
Tasas deflactadas 70
Uso conjunto 72
Aplicaciones de tasas indexadas y deflactadas 72
Conclusión 73
Referencias 73

Capítulo 3.
Series uniformes y gradientes 75

Series uniformes 75
Series uniformes vencidas 75
Series uniformes anticipadas 76
Series uniformes diferidas 77
Series uniformes perpetuas 79
Ejemplos prácticos de series uniformes 80
Series uniformes vencidas 80
Series uniformes anticipadas 81
Series uniformes diferidas 82
Series uniformes perpetuas 82
Series variables 83
Series variables aritméticas vencidas 84
Series variables aritméticas anticipadas 90
Gradientes geométricos 93
Series variables geométricas vencidas 94
Series variables geométricas anticipadas 97
Ejemplos prácticos de gradientes lineales y geométricos 100
Gradiente lineal vencido 101
Gradiente lineal anticipado: 102
Gradiente geométrico vencido 105
Gradiente geométrico anticipado 107
Referencias 109

Capítulo 4.
Sistemas de amortización y sus aplicaciones financieras..... 111

Introducción 111
Conceptos fundamentales de amortización 112
Clasificación de los sistemas de amortización..... 112
Sistema francés (cuota fija) 113
Fórmula de la cuota fija. 113
Sistema alemán (abono constante a capital)..... 114
Sistemas con periodo de gracia parcial y periodo muerto 116
Con cuota fija y tasa variable 118
Fórmula general 119
Con cuota variable y gradientes aritméticos..... 123
Fórmula general..... 123
Con cuota variable y gradientes geométricos..... 127
Fórmula general 128
Sistema de amortización con unidad de valor real (UVR) 131
Definición de la UVR..... 131
Referencias 134

Capítulo 5.
Evaluación de alternativas de Inversión..... 135

Introducción 135
Indicadores financieros 136
Indicadores de rentabilidad..... 137
Indicadores de liquidez..... 140
Análisis de sensibilidad..... 140
Análisis de sensibilidad por variable o unidimensional 141
Análisis de sensibilidad por escenarios o multidimensional 144
Cálculo del beneficio neto..... 146
Análisis e interpretación..... 147
Selección de proyectos: caso práctico 147
Caso práctico: evaluación de sensibilidad en la inversión para creación de una empresa manufacturera 148
Conclusiones del capítulo 160
Referencias 161

Capítulo 6.
Matemáticas financieras aplicadas a las finanzas internacionales 163

Justificación 163
Objetivo general 164
Objetivos específicos 165

Tipo de cambio 165
Riesgo cambiario 166
Futuros sobre divisas 167
Opciones sobre divisas 168
Arbitraje de divisas 169
Financiamiento internacional 169

Referencias 193

Glosario de términos 195

Lista de figuras

Capítulo 1.
Matemáticas financieras sostenibles y sustentables 35

Figura 1. Valor del dinero en el tiempo 39
Figura 2. Principio de equivalencia financiera 40
Figura 3. Trayectoria del interés simple 41
Figura 4. Trayectoria interés compuesto 43
Figura 5. Interés simple vs. interés compuesto 44
Figura 6. Fórmula de cálculo de monto, aplicando capitalización de intereses 45
Figura 7. Diagrama de flujo para 60 meses, tasa de interés del 2 % e inversión inicial de $5 millones 53

Capítulo 2.
Conversión de tasas de interés y equivalencia financiera 55

Figura 8. Variables para conversión de tasas nominal trimestral anticipada a vencida 62
Figura 9. Variables para conversión de tasas periódica mensual a nominal anual 62
Figura 10. Variables para conversión de tasas periódica trimestral a nominal anual 63
Figura 11. Variables para conversión de tasas nominal anual a periódica semestral 64
Figura 12. Variables para conversión de tasas nominal anual a periódica diaria 64
Figura 13. Variables para conversión de tasas periódica trimestral a efectiva anual 65
Figura 14. Variables para conversión de tasas periódica mensual a efectiva anual 65
Figura 15. Variables para conversión de tasas efectiva anual a periódica semestral 66
Figura 16. Variables para conversión de tasas efectiva anual a periódica diaria 67

Capítulo 3.
Series uniformes y gradientes 75

Figura 17. Diagramación del gradiente aritmético creciente (ahorro: A = $100; g = $20) 102
Figura 18. Diagramación de una serie con gradiente aritmético (esquema general) 103
Figura 19. Diagramación del ejemplo de gradiente decreciente (A = $500; g = –$30) 104
Figura 20. Diagramación del ejemplo de gradiente geométrico (bonificación: A = $1000; g = 10 %) 106
Figura 21. Diagramación del ejemplo de gradiente geométrico (suscripción: A = $50; g = 5 %) 108

Capítulo 6.
Matemáticas financieras aplicadas a las finanzas internacionales 163

Figura 22. Impacto del tipo de cambio en el pago final 177
Figura 23. Comparativa de interés a pagar 180
Figura 24. Comparativa de interés a pagar 183

Lista de tablas

Capítulo 2.
Conversión de tasas de interés y equivalencia financiera..... 55

Tabla 1. Relación entre tasas indexadas y deflactadas 71

Capítulo 4.
Sistemas de amortización y sus aplicaciones financieras..... 111

Tabla 2. Tabla de amortización por el sistema francés, cuota fija (extracto) 114
Tabla 3. Tabla de amortización por el sistema alemán, abono constante a capital (extracto) 115
Tabla 4. Tabla de amortización con periodo de gracia parcial..... 116
Tabla 5. Tabla de amortización con periodo muerto 117
Tabla 6. Tabla de amortización con tasa de interés variable 121
Tabla 7. Tabla de amortización con cuota creciente (gradiente aritmético) 126
Tabla 8. Tabla de amortización con gradientes..... 129
Tabla 9. Tabla de amortización en UVR..... 133

Capítulo 5. Evaluación de alternativas de Inversión 135

Tabla 10. Análisis se sensibilidad por variables..... 142
Tabla 11. Análisis de escenarios 146
Tabla 12. Flujo de caja proyectado..... 148
Tabla 13. Flujo de caja..... 150
Tabla 14. Flujo de caja con cálculo VPN y TIR 151
Tabla 15. Cálculo de VPN. Ecuación 76..... 151
Tabla 16. Cálculo de TIR. 152
Tabla 17. Resultados obtenidos..... 152
Tabla 18. Estado de resultados 154
Tabla 19. Estado de resultados 156
Tabla 20. Estado de situación financiera 157
Tabla 21. Flujo de efectivo..... 157
Tabla 22. Datos 158
Tabla 23. Flujo de efectivo..... 159
Tabla 24. Indicadores de rentabilidad 159

Capítulo 6.
Matemáticas financieras aplicadas a las finanzas internacionales..... 163

Tabla 25. Arbitraje de dos puntos..... 172
Tabla 26. Comparativa de pagos en pesos..... 177
Tabla 27. Comparación tasa fija vs. tasa variable..... 180
Tabla 28. Actualización tabla incluyendo el swap..... 182
Tabla 29. Especificaciones clave y ejemplos de futuros de divisas..... 187
Tabla 30. Factores clave en el mercado de divisas..... 188
Tabla 31. Desembolso en soles (PEN) para adquirir USD 1MM..... 192
Tabla 32. Desembolso en soles (PEN) para adquirir USD 1MM..... 192

Prefacio

Hace no mucho tiempo, la idea de que las matemáticas financieras pudieran coexistir con los conceptos de sostenibilidad y sustentabilidad habría sido considerada una contradicción. Las finanzas, se nos enseñó, se centran en la maximización de la rentabilidad; la sostenibilidad, en la preservación del planeta y la sociedad. Eran dos mundos paralelos, con poca o ninguna intersección.

Sin embargo, el mundo ha cambiado. Los desafíos que enfrentamos —desde el cambio climático y la pérdida de biodiversidad hasta la desigualdad social y la inestabilidad económica— nos han obligado a reevaluar nuestras prioridades. Hemos comprendido que la salud financiera a largo plazo de una empresa, una nación o incluso un individuo, está intrínsecamente ligada a la salud de nuestro entorno y nuestra sociedad. Ignorar esta realidad ya no es una opción viable.

Este libro nace de la convicción de que las matemáticas financieras no son el problema, sino una parte fundamental de la solución. Es una obra que busca tender un puente entre la teoría financiera tradicional y la urgente necesidad de construir un futuro más justo y resiliente. Aquí, exploraremos cómo las herramientas que usamos para calcular el valor presente neto, la tasa interna de retorno y el riesgo pueden ser adaptadas para incluir variables que midan el impacto ambiental y social. Veremos cómo la inversión en proyectos de energía renovable, la evaluación de bonos verdes y la valoración de empresas con prácticas éticas se pueden analizar con el rigor matemático que merecen.

Mi objetivo al escribir este prefacio, y el libro en su totalidad, es mostrar que es posible ser rentable y responsable al mismo tiempo. Para estudiantes, esta obra ofrece un marco de pensamiento que los preparará para los desafíos del siglo XXI. Para profesionales, proporciona un conjunto de herramientas prácticas

para integrar la sostenibilidad en su toma de decisiones. Para cualquier lector, es una invitación a reimaginar el propósito de las finanzas.

A través de las siguientes páginas, los guiaré por un camino donde los números y la ética se encuentran. Espero que este libro no solo los eduque, sino que también los inspire a ser agentes de cambio, demostrando que la verdadera riqueza se encuentra en un equilibrio duradero.

Prólogo

Las matemáticas financieras a menudo se perciben como un territorio exclusivo de economistas y banqueros, un mundo de fórmulas crípticas y modelos complejos que dictan el flujo de capital. Pero, ¿y si te dijera que el corazón de estas matemáticas no son solo los números sino las decisiones? Cada préstamo, cada inversión y cada plan de ahorro es una elección que moldea nuestro futuro. Durante mucho tiempo, esas decisiones se han guiado por una única métrica: la maximización de la ganancia. Sin embargo, estamos en un punto de inflexión.

El mundo que habitamos nos exige una nueva perspectiva. Los modelos que ignoran el impacto social y ambiental ya no son solo incompletos, son insostenibles. Este libro es una invitación a explorar un camino diferente. Un camino donde las matemáticas financieras se vuelven una herramienta para la sostenibilidad y la sustentabilidad. Aquí, el valor de una inversión no se mide solo en su rendimiento económico, sino también en su capacidad para generar un impacto positivo.

A través de estas páginas, no solo repasaremos los conceptos fundamentales —el valor del dinero en el tiempo, las anualidades, las tasas de interés y los criterios de evaluación de proyectos—, sino que también los reinterpretaremos bajo una nueva luz. Introduciremos variables que reflejan el costo del impacto ambiental, el beneficio de la inversión social y el valor de la resiliencia a largo plazo. Le mostraremos cómo construir modelos financieros que no solo sean rentables, sino también responsables.

Ya sean estudiantes, profesionales de las finanzas, empresarios o simplemente personas interesadas en entender cómo sus decisiones económicas pueden contribuir a un futuro más justo y verde, este libro les proporcionará las herramientas y la perspectiva necesarias. Prepárense para descubrir que las matemáticas financieras, lejos de ser un campo frío y calculador, son en realidad un lenguaje poderoso para construir el mundo que queremos dejar a las próximas generaciones. Este es un libro sobre números, sí, pero, sobre todo, es un libro sobre valor y propósito.

Introducción

Las matemáticas financieras representan una rama especializada de la matemática que emplea un conjunto de procedimientos, herramientas y métodos para facilitar la toma de decisiones de índole financiera. Esta disciplina se fundamenta en principios algebraicos y teorías financieras consolidadas, con el propósito primordial de establecer equivalencias monetarias a lo largo del tiempo y adherirse a los pilares fundamentales de las finanzas. En el panorama económico contemporáneo, la relevancia de las matemáticas financieras es innegable. Se hace imperativo que tanto estudiantes como profesionales desarrollen habilidades robustas de análisis e interpretación de información financiera. Esta preparación es crucial para enfrentar y tomar decisiones informadas en situaciones del mundo real, especialmente en un entorno «glocal», que exige considerar tanto las dinámicas de los mercados locales como las interdependencias económicas a escala global.

El objetivo principal de este texto es dotar a los estudiantes con las herramientas y el conocimiento indispensable para comprender y aplicar eficazmente los conceptos financieros. Esto se logra mediante la integración de técnicas matemáticas avanzadas y una sólida base en principios contables, algebraicos y financieros fundamentales. La meta última es capacitar a los individuos para desarrollar capacidades de análisis e interpretación de datos financieros, preparándolos así para escenarios prácticos en un entorno que es a la vez globalmente interconectado y localmente pertinente.

Este libro está específicamente concebido para estudiantes que aspiran a tomar decisiones financieras que no solo generen beneficios económicos, sino que también contribuyan a un mundo más sostenible y aseguren la viabilidad a largo plazo de estas acciones a través del cálculo y la interpretación precisa de los resultados financieros. El alcance abarca una diversidad de contextos esenciales, garantizando que los estudiantes adquieran las competencias necesarias para operar de manera efectiva y responsable en el ámbito financiero real. La inclusión explícita y recurrente de los términos «sostenibles y sustentables» junto con «glocal» en los objetivos y el alcance del material fuente no

es una elección casual, denota una filosofía pedagógica moderna y con visión de futuro. Mientras que los currículos tradicionales de matemáticas financieras a menudo priorizan la eficiencia cuantitativa y la maximización de ganancias, este enfoque expande la perspectiva para incorporar explícitamente consideraciones ambientales, sociales y de gobernanza (ESG) a largo plazo. Esto implica una reorientación, donde las decisiones financieras se evalúan no solo por sus retornos inmediatos, sino también por su impacto más amplio y duradero. La dimensión «glocal» subraya aún más que los actores financieros deben navegar entornos complejos influenciados tanto por condiciones específicas del mercado local como por fuerzas económicas globales interconectadas. Este énfasis colectivo apunta hacia un marco financiero holístico y responsable, preparando a los estudiantes para roles emergentes en una economía global cada vez más compleja y éticamente consciente, donde las finanzas sostenibles y la inversión de impacto adquieren una importancia primordial.

Este libro se ha estructurado para ofrecer una progresión lógica de los temas, guiando al lector desde los conceptos más básicos hasta las aplicaciones más complejas de las matemáticas financieras. Se iniciará con una revisión de los principios contables fundamentales y el concepto crítico del valor temporal del dinero. Posteriormente, se avanzará hacia las complejidades del cálculo de intereses, tanto simple como compuesto, y la necesidad imperante de la conversión y equivalencia de tasas de interés.

Un capítulo dedicado explorará el impacto de la inflación a través de las tasas indexadas y deflactadas. Las secciones subsiguientes abordarán los diversos tipos de series uniformes (anualidades) y series variables (gradientes), fundamentales para modelar patrones de flujos de caja diversos. Finalmente, destacará la utilidad de los diagramas de flujo económicos como herramientas visuales esenciales para la comprensión y el análisis de operaciones financieras complejas. Este enfoque estructurado garantiza una comprensión integral y coherente de las matemáticas financieras.

Capítulos

Capítulo 1. "Fundamentos de matemáticas financieras" abarca los presaberes contables y algebraicos, los principios financieros (valor del dinero en el tiempo y equivalencia financiera), el interés simple y compuesto, las ecuaciones de valor y las anualidades, y los diagramas de flujo económico, utilizando el contenido y ejemplos proporcionados en el documento.

Capítulo 2. "Conversión de tasas de interés y tasas indexadas y deflactadas" explica los conceptos de interés, tasas nominales y efectivas (vencidas y anticipadas), sus fórmulas de conversión, y detalla las tasas indexadas y deflactadas con sus definiciones, cálculos y aplicaciones, según el documento.

Capítulo 3. "Series uniformes y gradientes" describe las series uniformes (vencidas, anticipadas, diferidas, perpetuas) y las series variables (gradientes lineales y geométricos, tanto crecientes como decrecientes, vencidos y anticipados), incluyendo sus fórmulas y ejemplos prácticos del archivo.

Capítulo 4. "Sistemas de amortización y sus aplicaciones financieras" explica los sistemas de amortización (francés, alemán, con periodos de gracia parcial y muerto, con cuota fija y tasa variable, con cuota variable y gradientes aritméticos/geométricos, y el sistema UVR), con sus respectivas fórmulas y ejemplos prácticos.

Capítulo 5. "Evaluación de alternativas de inversión" detalla los indicadores financieros de rentabilidad (VPN, TIR, VAUE, IR) y liquidez (PRI), así como el análisis de sensibilidad (unidimensional y multidimensional), e incluye los casos prácticos de evaluación de proyectos presentados en el documento.

Capítulo 6. "Matemáticas financieras aplicadas a las finanzas Internacionales", cubre el tipo de cambio, el riesgo cambiario, los futuros y opciones sobre divisas, el arbitraje de divisas y el financiamiento internacional, incorporando las definiciones, ejemplos y ejercicios prácticos de las secciones correspondientes del documento.

Glosario

Amortización: proceso de pagar una deuda a lo largo del tiempo mediante una serie de pagos periódicos, que incluyen tanto el capital como los intereses.

Anualidad: serie de pagos o depósitos iguales realizados a intervalos de tiempo regulares. Ejemplos comunes son los pagos de préstamos, las primas de seguros o los depósitos en cuentas de ahorro.

Bonos (o títulos de deuda): instrumentos financieros que representan un préstamo que un inversor hace a un prestatario (generalmente un gobierno o una empresa). A cambio, el emisor se compromete a pagar intereses periódicos y devolver el capital al vencimiento.

Capitalización: proceso de acumular el interés de una inversión o préstamo para que los intereses futuros se calculen sobre el capital inicial más los intereses ya acumulados. Es el principio del interés compuesto.

Costo anual equivalente (CAE): herramienta utilizada para comparar proyectos de inversión o activos con vidas útiles diferentes, convirtiendo todos los flujos de efectivo en una anualidad equivalente.

Depreciación: reducción del valor de un activo a lo largo del tiempo, debido al uso, la obsolescencia o el deterioro.

Interés compuesto: interés que se calcula sobre el capital inicial y también sobre los intereses acumulados de periodos anteriores. A diferencia del interés simple, este tipo de interés genera un crecimiento exponencial.

Interés simple: interés que se calcula únicamente sobre el capital inicial. No se añaden los intereses acumulados al capital para los cálculos de peri odos futuros.

Inversión: acto de destinar dinero a un activo con la expectativa de obtener una ganancia o retorno en el futuro.

Préstamo: contrato en el que una entidad (prestamista) entrega una cantidad de dinero a otra (prestatario), que se compromete a devolverla en un plazo determinado, junto con unos intereses.

Rendimiento: ganancia o pérdida generada por una inversión en un periodo específico. Se expresa comúnmente como un porcentaje del capital invertido.

Tasa de interés efectiva: tasa real que se gana o se paga en un periodo, teniendo en cuenta la capitalización. Es la tasa anual equivalente.

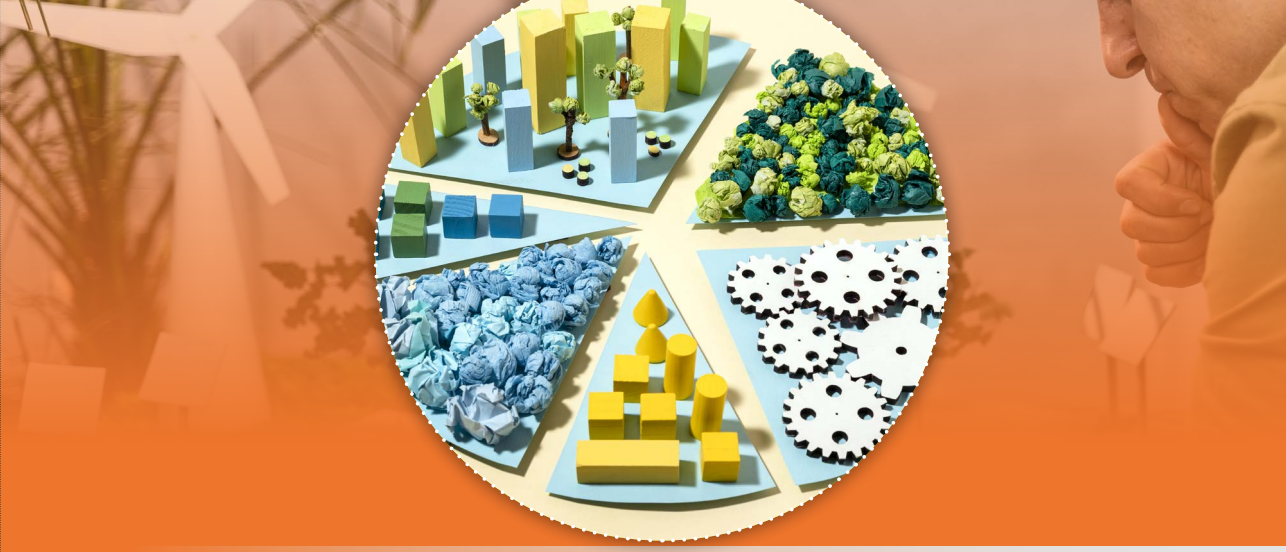
Tasa de interés nominal: tasa de interés que no tiene en cuenta la frecuencia de capitalización en un año. Por ejemplo, una tasa nominal del 12 % anual puede ser capitalizada mensualmente.

Tasa interna de retorno (TIR): tasa de interés a la cual el valor presente neto (VPN) de todos los flujos de efectivo de un proyecto se hace cero. Se utiliza para evaluar la rentabilidad de las inversiones.

Valor futuro (VF): valor de una inversión o una cantidad de dinero en una fecha futura específica, asumiendo una determinada tasa de interés.

Valor presente (VP): valor actual de una cantidad de dinero futura. Se calcula descontando esa cantidad futura a una tasa de interés específica.

Valor presente neto (VPN): criterio de evaluación de proyectos que calcula la diferencia entre el valor presente de los ingresos futuros y el valor presente de la inversión inicial. Si el VPN es positivo, el proyecto es rentable.



Capítulo 1

Matemáticas financieras sostenibles y sustentables

Palabras clave: finanzas, tasa de interés, interés, indicador financiero.
Keywords: finance, interest rate, interest, financial indicator.

Objetivo

Este libro de matemáticas financieras sostenibles y sustentables plantea como objetivo proporcionar a los estudiantes, las herramientas y conocimientos necesarios para comprender y aplicar conceptos financieros mediante el uso de técnicas matemáticas de vanguardia, entendiendo conceptos básicos contables, algebraicos y financieros que le permiten desarrollar habilidades de análisis e interpretación de información financiera, preparándose para situaciones del mundo real dentro de un contexto glocal.

Alcance

Este libro está dirigido a estudiantes que deseen estar en la capacidad de tomar decisiones financieras que beneficien a un mundo sostenible y que permitan la sustentabilidad de estas a través del cálculo e interpretación de resultados de orden financiero, abarcando múltiples contextos esenciales donde los estudiantes puedan adquirir las competencias fundamentales en un mundo financiero real.

Conceptos teóricos

La matemática financiera es una parte de la matemática que utiliza una serie de procedimientos, herramientas y métodos para la toma de decisiones de índole financiera, con base en procedimientos algebraicos y teorías financieras, con el fin de determinar equivalencias de dinero y de acuerdo con unos principios financieros.

Según Cabeza y Castrillón (2017), la contabilidad general se proyecta como una disciplina pragmática, que requiere para su comprensión unos conocimientos y términos básicos, como activos, pasivos, débito, crédito, valor bruto, valor neto, valor operacional, los cuales permiten entender la estructura de lo que se conoce como estados financieros básicos. Antes de continuar miremos estas definiciones de forma clara.

Según el Plan General de Contabilidad (PGC) de España, desde el punto de vista contable, se define como activo: los bienes, derechos y otros recursos controlados económicamente por la empresa, resultantes de desarrollar su actividad comercial, de los que se espera que la empresa obtenga beneficios o rendimientos económicos en el futuro.

De acuerdo con las Normas Internacionales de Información Financiera (NIIF), la definición de pasivo es: las deudas y las obligaciones que adquiere una empresa u organización y que se ven reflejadas en el estado de situación financiera. Es lo opuesto al activo. El pasivo se deduce del valor total de la empresa, ya que representa las deudas que tendrá que pagar en algún momento del futuro.

Según los principios de contabilidad generalmente aceptados (GAAP), el precio bruto de un bien o servicio es su valor real, descontando de ese valor real el costo de ventas. En dicha cantidad no se incluyen impuestos, deducciones o descuentos.

De acuerdo con las NIIF, valor operacional es: la utilidad que genera una compañía sin tener en cuenta los impuestos, gastos financieros u otro tipo de gasto contable que no implique una salida de dinero real de la organización. Y se calcula con la resta de la utilidad bruta menos los gastos de operación.

Por otra parte, el valor neto es: el término utilizado para referirse al valor operacional menos los impuestos, más la depreciación y las amortizaciones.

Estos términos es necesario entenderlos, interpretarlos y analizarlos, para ello se debe conocer a qué estados financieros pertenecen, por ejemplo, el estado de situación financiera, el estado de resultados, el flujo de caja financiero. A continuación se explicará de forma corta cada uno de ellos.

Según las Normas Internacionales de Información Financiera (NIIF o IFRS), un estado de situación financiera presenta en forma ordenada, estructurada, resumida y consistente, la situación financiera de una organización a una fecha determinada y revela la totalidad de sus bienes, derechos, obligaciones, y la situación del patrimonio.

De igual forma, las NIIF definen el estado de resultados como: un estado financiero básico en el cual se presenta información relativa a los logros alcanzados por la administración de una empresa durante un periodo determinado; es decir, nos permite determinar la utilidad neta de una organización, teniendo en cuenta los ingresos totales, los gastos totales y los impuestos a pagar.

De acuerdo con los GAAP, un flujo de caja se define como una herramienta financiera que permite ordenar las entradas y salidas de dinero de la empresa, en un tiempo determinado; se usa para calcular el saldo de efectivo al inicio y al final de dicho tiempo y tomar decisiones de inversión o financiamiento.

Es bueno conocer y entender para qué sirve cada uno estos estados financieros, ya sea para manejar el exceso o la falta de liquidez, el respaldo económico ante terceros, para solicitar endeudamiento, o para evaluar el manejo que se le están dando a los gastos, tanto administrativos como operacionales.

Cuando se habla de evaluación de alternativas de inversión, se tiene en cuenta la protección del flujo de caja con horizontes de tiempo de 3 a 5 años, preferiblemente, para tomar decisiones positivas que beneficien los proyectos o que desnuden las falencias y debilidades que puedan presentar a la hora de estructurar posibles inversiones.

Principios financieros: valor del dinero en el tiempo y equivalencia financiera

De acuerdo con Riveros (2024), el *principio de valor del dinero en el tiempo* es un concepto económico que establece que poseer una suma de dinero hoy es más valioso que poseerlo en el futuro, puesto que el dinero cambia su valor a través del tiempo, principalmente por las siguientes cuatro razones:

1. Inflación, hace que el dinero cada vez valga menos.

2. Incertidumbre acerca del futuro, es posible que no se disponga de ese dinero en el futuro.

3. Oportunidad de inversión, al poseer una suma de dinero hoy, podría invertirlo y obtendría más dinero en el futuro.

4. Preferencia de consumo, cualquier persona preferirá consumir un producto o servicio hoy que hacerlo en el futuro, siempre y cuando obtenga el mismo nivel de satisfacción. Por ejemplo, hoy podría aprovechar un descuento para comprar un activo.

Figura 1. *Valor del dinero en el tiempo*



Nota: *tomado de Bases matemáticas financieras (Riveros, 2024).*

Según Bellorín (2020), el valor del dinero en el tiempo es una herramienta que permite descubrir cómo cambia el poder adquisitivo del dinero y cuáles son los diferentes métodos que se utilizan para realizar ese cálculo. Ante las diferentes situaciones cotidianas, conocer y aplicar el valor del dinero en el tiempo permite tomar mejores decisiones relacionadas con las finanzas, para que el dinero se pueda emplear mejor y construir un futuro más seguro, tranquilo y productivo. Esta herramienta es sumamente importante en el mundo de los negocios y se aplica perfectamente en la vida personal.

Según Riveros (2024), el *principio de equivalencia financiera* es un principio económico que establece que dos cantidades de dinero ubicadas en diferentes momentos del tiempo son equivalentes si, al trasladarlas a un mismo punto o tiempo, se hacen iguales en magnitud.

Ejemplo: $50.000 pesos de hoy son equivalentes a $150.000 pesos dentro de cinco años, dada una tasa de interés del 40 % anual (interés simple).

Figura 2. *Principio de equivalencia financiera*



Nota: *tomado de Bases matemáticas financieras (Riveros, 2024).*

Interés simple e interés compuesto

De acuerdo con Riveros (2024), el *interés* (i) es la compensación que se paga por el uso del dinero durante el periodo del préstamo, desde el punto de vista del deudor. Desde el punto de vista del prestamista, es el alquiler que se cobra por postergar su uso en una fecha futura.

Al tratarse de un importe de alquiler, el interés está determinado por periodos (días, meses, trimestres) y por un capital comprometido ($100.000 pesos, $5.000.000 de pesos).

La *tasa de interés* $(i\ \%)$ es la expresión porcentual del interés y representa la tasa de retorno arrojada por una determinada suma de dinero durante un lapso.

Ejemplo: $i\ \% = 1{,}7\ \%$ mensual, $i\% = 20\ \%$ anual.

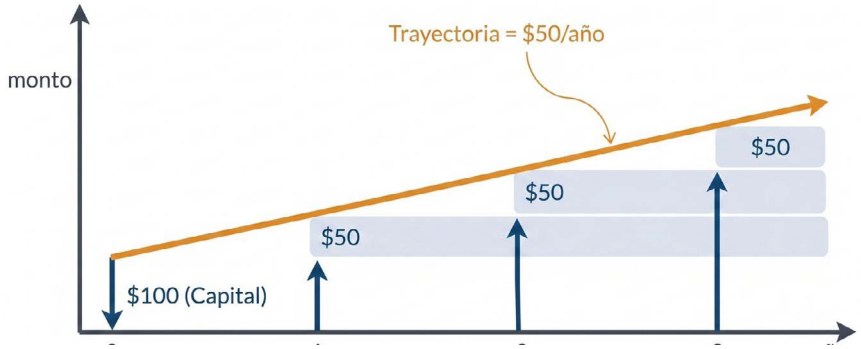
Las tasas de interés se clasifican de acuerdo con la posibilidad de capitalización de sus intereses en: simple y compuesto.

Interés simple

Según Triana Calderón (2022), el interés simple es aquel valor calculado para un periodo, donde este permanece constante a lo largo de la obligación, en el caso de una deuda a cancelar en un año con pagos mensuales de 10 unidades monetarias; esto indica que se harán 11 pagos de 10 unidades monetarias por concepto de interés y el último (doceavo) por el valor de la obligación más 10 unidades monetarias de intereses.

Los intereses no son capitalizables, es decir que, al finalizar un periodo, estos no hacen parte de la deuda inicial o la inversión. Los intereses son calculados sobre el capital primario o saldo de la obligación.

Figura 3. *Trayectoria del interés simple*



Nota: *Gráfica de trayectoria del interés simple acumulado durante un periodo de tres años, un monto de $100 y tasa de interés anual del 50 %. Tomado de https://betterexplained.com/wp-content/uploads/interest/simple_interest_trajectory.png*

Variables que intervienen en el cálculo del interés simple

En el desarrollo de problemas financieros para solucionar a través de interés simple es necesario tener en cuenta las siguientes variables:

- Capital inicial (C) o valor presente (VP): hace referencia al dinero destinado para la inversión o financiación.

- Capital final o valor futuro (VF): es el valor acumulado, fruto de sumar el capital y los intereses simples generados durante la operación.

- Tasa de interés, ratio o razón ($i\%$): es la tasa de interés que se aplicará al caso financiero, en los periodos estipulados.

- Plazo, tiempo o periodo (t): corresponde al periodo en el cual se llevará a cabo la inversión o financiación.

- Interés acumulado o monto (M): es la cantidad de dinero que se obtiene de la operación.

- Capitalización (n): es la periodicidad de pago de intereses por año.

Ecuaciones de valor

De acuerdo con Triana Calderón (2022), las ecuaciones de valor son expresiones matemáticas que dan solución al planteamiento de un problema, y el interés simple no es la excepción. A continuación, se verán algunos ejemplos.

Mediante la utilización del algebra es posible, por ejemplo, determinar el valor actual de una suma de dinero que se recibirá en el futuro, despejando la variable x de una determinada ecuación. En el siguiente ejemplo se aprecia paso a paso el desarrollo de una ecuación que permite hallar el valor presente equivalente, considerando una tasa de interés del 1,5 % anual, lapso de dos meses (equivale a un sexto del año), capital inicial de 720.000 y suma de dinero futuro por 150.000:

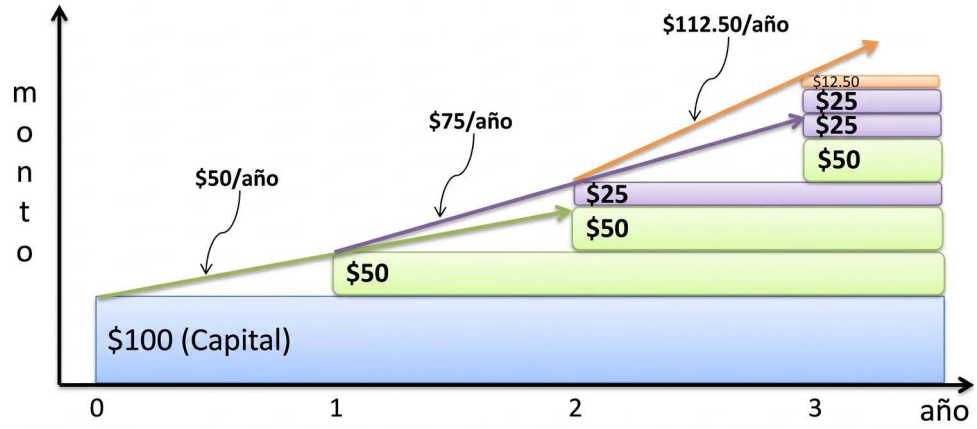
$$\begin{aligned} 720.000\ 1+ [0{,}015\ x\ 1/6] +150.000 &= x\ 1+ [0{,}015\ x\ 1/6] \\ 871.800 &= 1{,}0025\ x \\ x &= 871.800 \div 1{,}0025 \\ x &= 869.625{,}93 \end{aligned}$$

Interés compuesto

De acuerdo con Arias Escobar (2020), el interés compuesto se caracteriza por ser progresivo a través del tiempo. Es el tipo de interés utilizado por las empresas, el comercio y el sistema financiero en general.

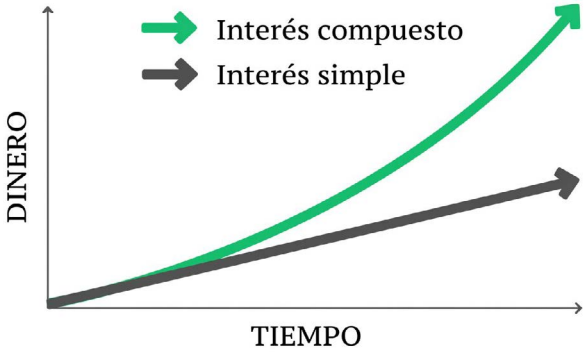
Los intereses se capitalizan o acumulan en la misma cuenta del capital, es decir, el monto para el cálculo siempre está aumentando, debido a la acumulación de intereses a través del tiempo.

Figura 4. *Trayectoria interés compuesto*



Nota: *Gráfica de la trayectoria del interés compuesto acumulado durante un periodo de tres años, un monto de $100 y tasa de interés anual del 50 %. Tomado de https://betterexplained.com/wp-content/uploads/interest/compound_intererest_traj.png*

Figura 5. *Interés simple vs. interés compuesto*



Nota: *Gráfica comparativa sobre evolución del dinero a través del tiempo, considerando interés simple e interés compuesto. Central de Fondos Tomado de https://centraldefondos.com/generar-riquezas-mediante-el-interes-compuesto-ser-millonario/*

A continuación se presenta la fórmula de cálculo del interés compuesto:

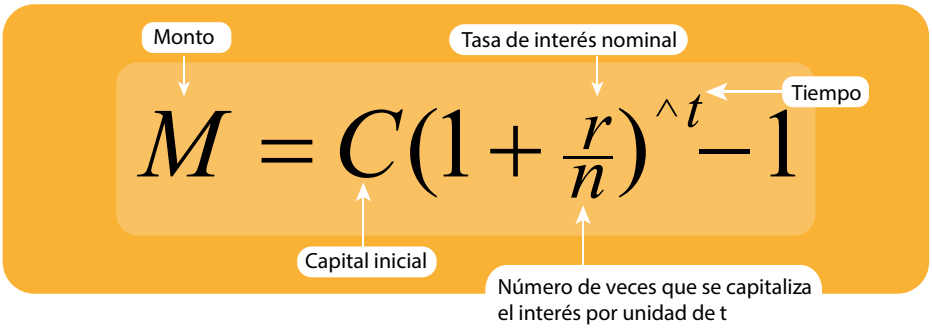
$$M = C * ((1 + i\% / n)\hat{}\, t) - 1$$

donde:

M:monto o interés acumulado ($); C: capital inicial ($); $i\%$: tasa de interés nominal anual (%); t: plazo de tiempo; n: número de capitalizaciones de intereses al año. Nota: el símbolo ^ representa exponente o elevado a la potencia.

Este tipo de interés es aplicado en el sistema financiero a créditos o préstamos.

Figura 6. *Fórmula de cálculo de monto, aplicando capitalización de intereses*



Nota: *imagen adaptada de Bases de matemáticas financieras (Riveros, 2024).*

De acuerdo con Broverman (2023), la tasa de interés efectiva anual que genera una inversión durante un periodo de un año es el cambio porcentual en el valor de la inversión desde el comienzo hasta el final del año, sin tener en cuenta el comportamiento de la inversión en puntos intermedios del año.

Los siguientes ejemplos son tomados de guías de trabajo de Riveros (2024).

Ejemplo: un capital inicial de $1000 dólares americanos (USD) obtiene un rendimiento del 10 % semestral periódico o 20 % nominal anual pagadero semestralmente durante tres semestres, ¿qué monto de intereses habrá acumulado al final, usando capitalización de intereses o también denominado interés compuesto?

Los valores de las variables a usar son: $C = \$1000; i\% = 20\%$ NASV (nominal anual pagadero en forma semestral vencida); t = 3 semestres; n = capitaliza intereses 2 veces al año. Ahora, se sustituyen los valores dentro de las variables de la fórmula y se realiza el cálculo respectivo:

$$M = \$1000USD * \left(\left(1 + \frac{20\% NASV}{2} \right)^3 \right) - 1$$

$$M = \$331USD$$

Variables que intervienen al realizar cálculo de interés compuesto

- Capital inicial (C) o valor presente (VP): hace referencia al dinero destinado para la inversión o financiación.
- Capital final o valor futuro (VF): es el valor acumulado, fruto de sumar el capital y los intereses simples generados durante la operación.
- Tasa de interés, ratio o razón ($i\%$): es la tasa de interés que se aplicará al caso financiero, en los periodos estipulados.
- Plazo, tiempo o periodo (t): corresponde al periodo en el cual se llevará a cabo la inversión o financiación.
- Interés acumulado o monto (M): es la cantidad de dinero que se obtiene de la operación.
- Capitalización (n): es la periodicidad de pago de intereses por año.

Equivalencias financieras entre valor presente, valor futuro y series uniformes

A continuación, se presentan mediante ejemplos las fórmulas para hallar el valor futuro de una suma de dinero actual, el valor presente de una suma de dinero futura, el valor de una renta o pago, dada una suma de dinero futura, y el valor de una renta o pago, dado un valor presente, considerando capitalización de intereses o interés compuesto.

Fórmula para hallar el valor futuro (VF) dado un valor presente (VP)

$$VF = VP * (1+i\%/n)\text{^}t$$

Ejemplo: hallar el valor futuro equivalente de un valor presente o capital inicial de $100.000 pesos, una tasa de interés nominal anual pagadera semestralmente en forma vencida del 15 %, un lapso de seis semestres.

Desarrollo:

VP = $100.000 pesos; i % = 15 % NASV; n = 2 veces al año; t = 6 semestres.
VF = $100.000 * (1+15%/2)^6
VF = $100.000 * (1+7,5% semestral periódica)^6
VF = $100.000 * 1,5433
VF = $154.330,15

Fórmula para hallar el valor presente (VP) dado un valor futuro (VF)

$$VP = VF / (1+ i\ \% / n)\text{^}t$$

Ejemplo: hallar el valor presente equivalente de un valor futuro de $200.000 pesos, dada una tasa de interés nominal anual pagadera trimestralmente en forma vencida del 9 %, un lapso de 8 trimestres.

Desarrollo:

VF= $200.000 pesos; i %= 9% $NATV$;
n = 4 veces al año; t = 8 trimestres.

VP = $200.000 / (1+9%/4)^8
VP = $200.000 / (1+2,25% trimestral periódica)^8
VP = $200.000 / 1,194831
VP = $167.387,67

Fórmula para hallar tasa de interés (i %), dado un valor presente (VP) y un valor futuro (VF)

La tasa equivalente que une un valor presente (VP) con un valor futuro (VF) es: $i\ \% = (VF/VP)(1/t) - 1$. Esta tasa representa un crecimiento compuesto continuo entre un valor presente y un valor futuro.

Ejemplo: hallar la tasa de interés equivalente dado un valor futuro de $200.000 pesos, un valor presente de $167.387,67 y un lapso de 8 trimestres.

Desarrollo:

$VF = \$200.000$ pesos; $VP = 167.387,67$; $t = 8$ trimestres.

$$i\ \% = (\$200.000/\$167.387,67)^{(1/8)} - 1$$
$$i\ \% = (1,194831)^{0,125} - 1$$
$$i\ \% = 1,0225 - 1 = 0,0225$$
$$i\ \% = 2,25\%\ \text{trimestral periódica}$$

Anualidad o renta o pago

Según Gutiérrez (2020), una anualidad es una serie de pagos iguales realizados a intervalos iguales de tiempo. La palabra anualidad se refería originalmente a pagos anuales. Hoy en día se emplea en series de pagos con intervalos de tiempo de cualquier longitud entre un pago y otro.

De acuerdo con Vidaurri (2020), la anualidad es una sucesión de pagos iguales realizados a intervalos iguales de tiempo. El término anualidad parece implicar que los pagos se efectúan cada año; sin embargo, esto no es necesariamente así, ya que estos pueden ser semestrales, mensuales, quincenales, etc.

De acuerdo con Miguel Seco y Miguel Solano (2020), en la mayoría de las rentas que se encuentran en el mundo real se utiliza para su valoración una ley financiera de capitalización o descuento compuesto, sin embargo, en algunas ocasiones la valoración se realiza aplicando una ley financiera simple.

Clases de anualidades o rentas uniformes

Las más comunes son las siguientes: anualidad vencida, anualidad anticipada, anualidad diferida, anualidad perpetua.

Anualidad o renta vencida

Según Andrés Riveros (2024), es aquel pago que se desembolsa al final del periodo (año, trimestre, mes, etc.). Por ejemplo, las alícuotas mensuales iguales y vencidas para la compra de electrodomésticos, vehículos, viviendas, son ejemplos de anualidades vencidas.

Fórmula para hallar pago o renta (R), dado valor presente (VP)

$$R = (VP * i\%) \div (1 - (1 + i\%) - t)$$

Ejemplo: un préstamo bancario por valor de $10.000.000 de pesos se desea amortizar en 8 pagos trimestrales iguales. Si la tasa de interés que se cobra es del 36 % anual, determine cuál es el valor de cada pago o renta.

Desarrollo:

VP = $10.000.000 de pesos,
$i\%$ = 36 % anual;
n = 4 trimestres al año,
t = 8 trimestres.

$$R = (\$10.000.000 * 36\% /4) / (1 - (1 + 36\%/4)^{-8})$$
$$R = (\$10.000.000 * 9\%) / (1 - (1{,}09)^{-8})$$
$$R = \$\ 900.000 / (1 - 0{,}501866)$$
$$R = \$\ 1.806.743{,}77$$

Fórmula para hallar pago o renta (R) dado un valor futuro (VF)

Ejemplo: ¿Cuánto se debe depositar al final de cada mes, durante tres años, en una cuenta de ahorro programado que reconoce una tasa del 3,5 % mensual hasta acumular la suma de $10.000.000?

Desarrollo:

$i\%$= 3,5 % mensual vencido,
t = 3 *12 = 36 meses,
VF = $10.000.000.

$$R = (\$10.000.000 * 3{,}5\%) \div ((1 + 3{,}5\%)^{36} - 1)$$
$$R = \$350.000 / ((1{,}035^{36}) - 1)$$
$$R = \$350.000 / (3{,}450266 - 1)$$
$$R = \$350.000 / 2{,}450266$$
$$R = \$142.841{,}62$$

Diagrama de flujo económico

Según Pinzón Núñez (2020), un diagrama de flujo representa la esquematización gráfica de un algoritmo, el cual muestra gráficamente los pasos o procesos que se deben seguir para alcanzar la solución de un problema. Su correcta construcción es sumamente importante porque, a partir del mismo, se escribe un programa en algún lenguaje de programación. Si el diagrama de flujo está completo y correcto, el paso del mismo a un lenguaje de programación es relativamente simple y directo.

Un diagrama de flujo también es un esquema para representar gráficamente un algoritmo. De acuerdo con Frank Gilbreth (1921), los flujogramas se basan en la utilización de diversos símbolos para representar operaciones específicas, es decir, es la representación gráfica de las distintas operaciones que se tienen que realizar para resolver un problema, con indicación expresa el orden lógico en que deben realizarse. Se les llama diagramas de flujo porque los símbolos utilizados se conectan por medio de flechas para indicar la secuencia de operación. Para hacer comprensibles los diagramas a todas las personas, los símbolos se someten a una normalización, es decir, se

hicieron símbolos casi universales, ya que en un principio cada usuario podría tener sus propios símbolos para representar sus procesos en forma de diagrama de flujo.

Importancia de los diagramas de flujo

De acuerdo con la Organización Internacional de Normalización (ISO), ISO 5807: los diagramas de flujo son importantes porque facilitan la manera de representar visualmente el flujo de datos por medio de un sistema de tratamiento de información, en este realizamos un análisis de los procesos o procedimientos que requerimos para realizar un programa o alcanzar un objetivo.

Definición de flujograma: según definición dada por el Instituto Nacional Estadounidense de Estándares (ANSI), un flujograma es un diagrama que representa un proceso o algoritmo, usando símbolos estandarizados que indican diferentes tipos de acciones o decisiones. Los elementos comunes incluyen:

- **Óvalo:** inicio y fin del proceso.
- **Rectángulo:** proceso o acción que se debe realizar
- **Rombo:** decisión que afecta el flujo del proceso.
- **Flechas:** indican la dirección del flujo.

Aplicaciones en matemáticas financieras

- **Cálculo de intereses:** los flujogramas pueden ser utilizados para representar el proceso de cálculo de intereses simples y compuestos, mostrando las fórmulas y pasos necesarios.
- **Análisis de proyectos:** en la evaluación de proyectos de inversión, se pueden crear flujogramas para visualizar el flujo de caja, los ingresos y los gastos a lo largo del tiempo.

- **Amortización de préstamos:** un flujograma puede ayudar a ilustrar el proceso de amortización, mostrando cómo se distribuyen los pagos entre principal e interés.

Ventajas de usar flujogramas

- *Claridad visual*: facilitan la comprensión de procesos complejos al presentar la información de manera estructurada.
- *Identificación de errores:* ayudan a identificar posibles errores o cuellos de botella en un proceso financiero.
- *Comunicación:* son herramientas efectivas para comunicar procesos a otros, ya sea en presentaciones o en documentación técnica.

Pasos para crear un flujograma financiero

- *Definir el proceso*: establecer claramente qué proceso financiero se va a representar.
- *Identificar etapas y decisiones:* listar todas las etapas y decisiones que se deben tomar en el proceso.
- *Seleccionar símbolos:* elegir los símbolos adecuados para representar cada tipo de acción o decisión.
- *Dibujar el flujograma:* organizar los símbolos y conectar con flechas para mostrar el flujo del proceso.
- *Revisar y validar:* asegurarse de que el flujograma sea claro y preciso, validando con otros si es necesario.

El diagrama de flujo es un gráfico donde se representa el planteamiento de un problema matemático, junto con las variables identificadas con información y las variables identificadas como incógnita, considerando su representación de la siguiente manera:

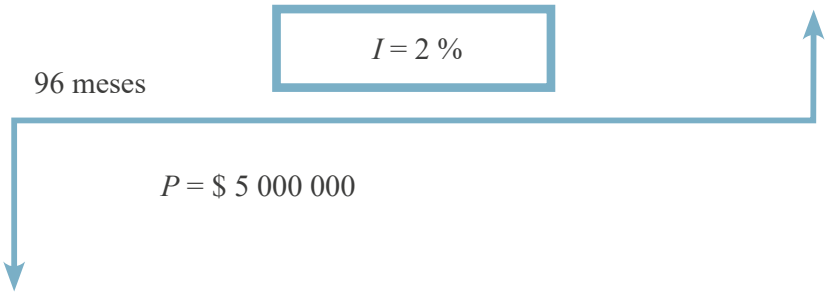
Para graficar los ingresos se hace con una flecha mirando hacia arriba y para graficar los egresos se dibuja una flecha mirando hacia abajo, todo trabajado sobre una línea recta que indica el horizonte de tiempo propuesto, ya sea en años, semestres, trimestres, bimestres, meses etc.

Ejemplo: ejercicio tomado de Rosillo (2009). ¿Cuánto dinero acumularía Pedro Picapiedra dentro de 8 años, si invierte hoy $5.000.000 a una tasa de interés simple del 2 % mensual?

El primer paso para resolver el problema planteado es elaborar un diagrama de flujo de la siguiente manera:

Considerar los ingresos de dinero con una flecha hacia arriba y los desembolsos con una flecha hacia abajo, en una escala de tiempo que pueden ser años, semestres, meses, días. La escala de tiempo debe estar expresada en el mismo periodo en el que está expresada la tasa de interés; en el ejemplo, la tasa de interés está expresada en meses, por lo tanto, los 5 años se deben convertir a meses, o sea 60 meses.

Figura 7. *Diagrama de flujo para 60 meses, tasa de interés del 2 % e inversión inicial de $5 millones*



Referencias

Arias Escobar, G. E. (2020). *Matemáticas financieras*. Editorial Universidad Autónoma de Manizales. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/175093

Bellorín, M. U. (2020). El valor del dinero en el tiempo. *Revista Multi-Ensayos, 6*(11), 25-30. https://doi.org/10.5377/multiensayos.v6i11.9285

Broverman, S. (2023). *Mathematics of Investment & Credit* (8.ª ed.). ACTEX Learning.

Cabeza de Vergara, L., & Castrillón Cifuentes, J. (2017). *Matemáticas financieras* (5.ª ed., reimp.). Editorial Universidad del Norte.

Gutiérrez Banegas, M. Á. (2020). *Matemáticas financieras*. Instituto Mexicano de Contadores Públicos. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/130920

Miguel Seco, J. M. D. y Miguel Solano, A. D. (2020). *Matemáticas financieras: problemas resueltos*. Editorial Tébar Flores. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/176521?page=1

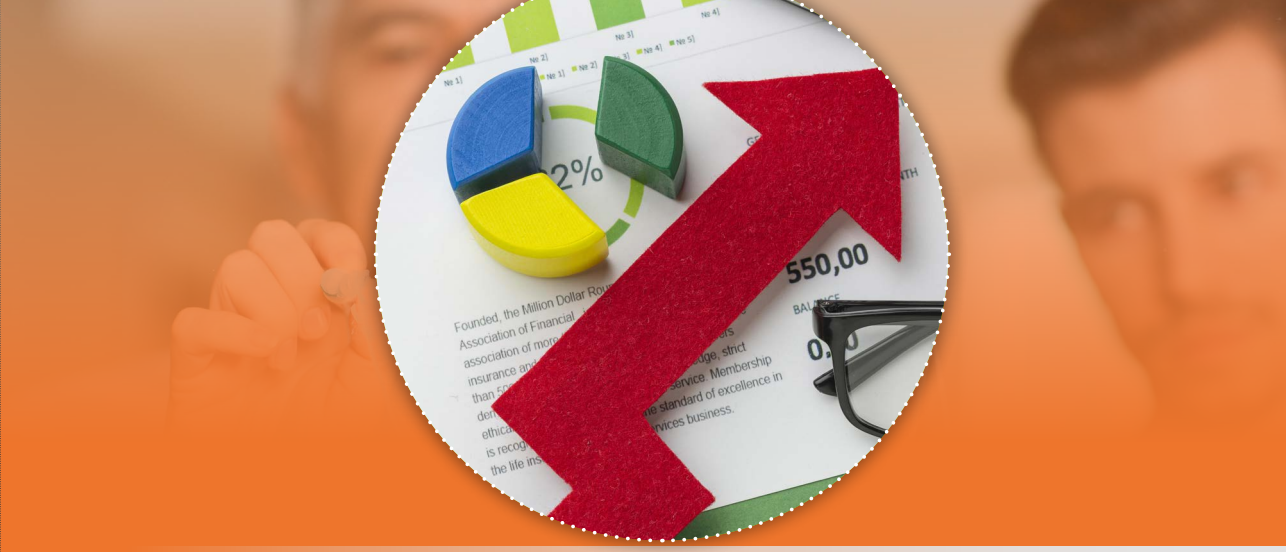
Pinzón Núñez, S. A. y Rodríguez Guerrero, R. (2020). Diagrama de Flujo: Definición. *Tecnología en Sistematización de Datos - UNAM, 1*-17. http://docencia.fca.unam.mx/~rcastro/df.pdf

Riveros, A. R. (15 de diciembre de 2024). Bases de matemática financiera. *Blog de Andrés Riveros Finance and Risk Management.* https://andresriv1979.wordpress.com/bases-matematica-financiera/

Rosillo C., J. S. (2009). *Matemáticas financieras para decisiones de inversión y financiación*. Biblioteca Banco de la República.

Triana Calderón, O. (2022). *Matemáticas financieras aplicadas. Ciencias Administrativas, Económicas y Contables. 13*. https://repositorioctei.ucundinamarca.edu.co/administrativas/13

Vidaurri Aguirre, H. M. (2020). *Matemáticas financieras* (7.ª ed.). Cengage Learning Editores. https://www-ebooks7-24-com.bibliotecavirtual.unad.edu.co/?il=10760



Capítulo 2

Conversión de tasas de interés y equivalencia financiera

Introducción

La tasa de interés es el instrumento central que permite cuantificar el costo de oportunidad del dinero a lo largo del tiempo. En matemática financiera, el análisis de tasas bajo distintas modalidades: nominales, efectivas, periódicas, vencidas o anticipadas, resulta esencial para evaluar inversiones, créditos, ahorros y cualquier flujo de caja que involucre el valor temporal del dinero (Riveros, 2024) La correcta conversión de tasas y el establecimiento de su equivalencia aseguran que las decisiones financieras comparen correctamente alternativas que se presentan en términos heterogéneos.

Conversión de tasas

La conversión de tasas es un procedimiento matemático que permite expresar en diferentes frecuencias las tasas de interés para el desarrollo de modelos financieros donde el plazo y el interés coincidan en la misma equivalencia. Según Boada (2021), las tasas son equivalentes cuando en diferentes expresiones dan como resultado un mismo interés al momento final de la operación.

Según Escobar (2020), la base de tiempo indica cada cuánto se acude a recibir o a pagar los intereses ante la entidad financiera, banco, establecimiento, entre otros. Según la tasa expresa, esta puede ser denominada en diferentes frecuencias. Lo anterior permite evidenciar que las tasas de interés deben ser expresadas con base en los periodos de capitalización y del tiempo pactado para el desarrollo de las transacciones financieras.

Conceptos generales

Interés

Según Boada (2021), el interés es la expresión del costo del dinero como respuesta a la pérdida del poder adquisitivo de este. Ya sea en un crédito o en los recursos propios, debe existir un rendimiento requerido mínimo para evitar la destrucción de valor en el tiempo.

En este mismo esquema se entiende el interés como la compensación que se le paga al dueño del capital por su uso a lo largo del tiempo (Agudelo R. et al., 2019)".

En otras palabras, el interés es la cantidad adicional que se paga al banco al devolver un capital prestado, o que se recibe al recuperar una inversión.

Los mismos autores señalan que la tasa de interés es otra tasa de crecimiento de la variable económica capital, de manera análoga a como lo son la inflación para el nivel de precios, la devaluación para el tipo de cambio y la tasa de crecimiento para el PIB (Agudelo R. et al., 2019).

Según Boada (2021), la tasa de interés representa la variación porcentual del interés generado en función del valor presente o capital inicial. Representa un valor relativo porcentual de la utilidad o pérdida en función a la inversión inicial, aspecto importante para comparar ahorros e inversiones independientemente del monto a invertir.

En términos generales, representa la probabilidad de materialización del riesgo y la posible ganancia de la utilización del dinero en una situación y tiempo determinados. En este sentido, la tasa de interés es el precio del dinero, el cual se debe pagar/cobrar por tomarlo prestado/cederlo en préstamo en una situación determinada.

El proceso para hallar el valor equivalente de una tasa se denomina conversión de tasas de interés que permite cambiar su tipo, nominalidad, periodicidad o forma.

Para efectuar correctamente la conversión de tasa es necesario identificar con claridad cuáles son los elementos de las tasas de interés que se mencionan a continuación:

Tipos de tasas

1. Nominal
2. Efectiva
3. Nominalidad: mensual, semestral, anual, etc.
4. Periodicidad: mensual, semestral, anual, etc.
5. Forma: vencida o anticipada.

Tasa nominal

Según Escobar (2020), la tasa nominal es aquel tipo de interés donde la base de tiempo difiere de los periodos de capitalización de los intereses, siendo expresa de forma anticipada o vencida. Según Boada (2021), la tasa nominal es la representación anual de la tasa periódica sin capitalización periódica del interés y se calcula mediante la multiplicación de la tasa periódica por el número de periodos.

La tasa nominal es una de las expresiones más comunes del interés en contextos financieros. Se refiere a la tasa anual declarada que no tiene en cuenta los efectos de la capitalización dentro del año. Según Ross et al. (2018), la tasa nominal facilita la estandarización de las tasas de interés para comparación, aunque por sí sola no refleja el verdadero costo del dinero si no se especifica la periodicidad de capitalización.

Ejemplo:

4 % Anual	Semestre	Anticipada
Base de tiempo	Periodo de capitalización	Anticipada / vencida

Base de tiempo: indica el periodo de tiempo en que el usuario del crédito o beneficiario del ahorro recibe o paga los intereses ante la entidad correspondiente.

Periodos de capitalización: periodo en que para el usuario del crédito o ahorrador del dinero le están cobrando o abonando los intereses, respectivamente; en el ejemplo es semestres o dos veces en el año.

Anticipada/vencida: indica si los pagos de los intereses se realizan al principio del periodo (anticipado) o al final del mismo (vencido).

Generalmente se acompaña del número de periodos de capitalización por año. Por ejemplo, una tasa nominal del 24 % con capitalización mensual indica que se aplicará un 2 % mensual sobre el saldo.

Fórmula:

$$N = i\,\%\,p * t$$
$$i\,\%\,p = i\,\%\,Nt$$

donde:

N: tasa nominal anual
$i\,\%\,p$: tasa periódica
t: número de periodos de capitalización por año

Ejemplo:

Una entidad financiera ofrece una tasa del 24 % nominal con capitalización mensual. ¿Cuál es la tasa periódica aplicada?

$$I\,\%\,p = 0{,}24 / 12 = 0{,}02\ 0\ \text{o}\ 2\ \%$$

Interés efectivo

Es aquel tipo de interés que se debe expresar de forma vencida, dado que la base de tiempo no difiere de los periodos de capitalización de los intereses y siempre se debe expresar de forma vencida, según Escobar (2020). La tasa efectiva es la que representa el interés real generado en un año mediante la capitación o reinversión de los intereses liquidados en cada periodo, según Boada (2021).

La tasa efectiva representa la rentabilidad real obtenida cuando los intereses son capitalizados periódicamente. A diferencia de la tasa nominal, esta incorpora explícitamente el efecto compuesto del interés. Gitman y Zutter (2015) la definen como la tasa que refleja el rendimiento real de una inversión en el periodo de un año.

Ejemplo:

5 % Trimestral	Trimestre	Vencida
Base de tiempo	Periodo de capitalización	Anticipada / vencida

Las tasas efectivas se identifican por:

La base de tiempo y los periodos de capitalización están expresados en la misma frecuencia de tiempo, es decir, anual, semestral, trimestral, mensual, etc.

El pago de los intereses será expresado en términos vencidos.

Interés vencido

De acuerdo con Boada (2021), las tasas de interés efectivas determinadas a periodo vencido, en donde los intereses se generan al vencimiento del periodo, es decir que el interés vencido es aquel que se causa en forma vencida en el periodo; sin embargo, la tasa efectiva es siempre vencida y por lo tanto en su declaración esta palabra se omite.

$$i\ \%\ \text{vencido} = \%\ i\ \text{anticipado} / (1 + i\ \%\ \text{anticipado})$$

Fórmula:

$$I = 1 + i\ \%\ pt - 1$$
$$Ip = 1 + i\ \%\ p1/\ t - I$$

donde:

i = tasa efectiva anual
$i\ \%\ p$ = tasa periódica
t = número de periodos de capitalización por año

Ejemplo:

Si una tasa nominal es del 18 % con capitalización trimestral, la tasa periódica será 4,5 %.

Aplicando la fórmula:

$$i = (1 + 0{,}045)^4 - 1 = 18{,}55\ \%$$

Interés anticipado

De acuerdo con Boada (2021), es la tasa cuyos intereses se causan en forma anticipada en el periodo y presentan un valor inferior al interés efectivo vencido. La tasa efectiva no puede darse, por definición, en forma anticipada.

$i\,\%$ anticipado $= \%\, i$ vencido $/ (1+ i\%$ vencido$)$
$i\,\% = 1 - ip - t - 1$
$i\,\% = 1 - 1 + i\,\% p\ -1/t$

Conversión entre tasas de interés

Según Boada (2021), las tasas son equivalentes cuando en diferentes expresiones dan como resultado un mismo interés al momento final de la operación, arrojando el mismo valor futuro o la misma tasa efectiva anual.

Las equivalencias entre las tasas de interés son operaciones fundamentales para el desarrollo de los diferentes ejercicios aplicados a las matemáticas financieras.

Tasa anticipada a vencida

Fórmula:

$i\,\% a = i\% v / (1+ i\%v)$

$i\,\% a$: interés anticipado

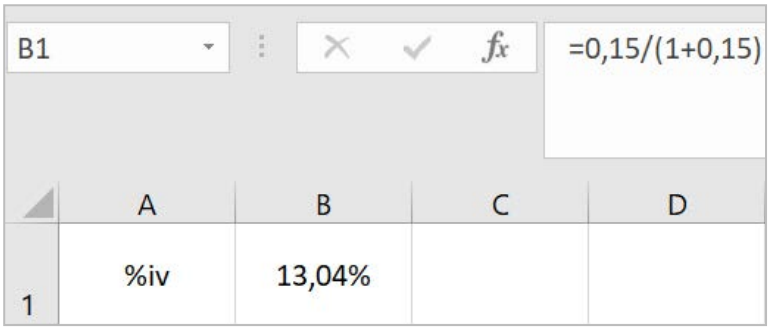
$i\,\% v$: interés vencido

Ejemplo:

15 $\%\, NTA$ (nominal trimestral anticipado) convertirla en una tasa vencida equivalente

$\%\, iv = 0{,}15 / (1+0{,}15) = 13{,}04\ \%$

Figura 8. *Variables para conversión de tasas nominal trimestral anticipada a vencida*



Tasa periódica a nominal

Fórmula: $i\ \%p = i\ \%p^{*}t$

i%p: tasa periódica

t: número de periodos

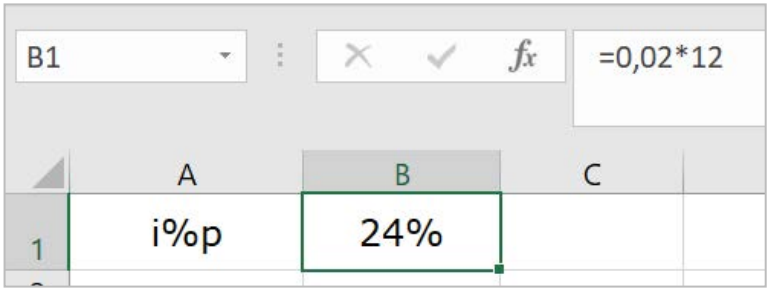
Ejemplo 1:

I%p: 2 % MV (mensual encida)

t: 12 meses

$i\ \%p = 0{,}02 * 12 = 0{,}24 = 24\%$ *ANV* (anual nominal vencida)

Figura 9. *Variables para conversión de tasas periódica mensual a nominal anual*



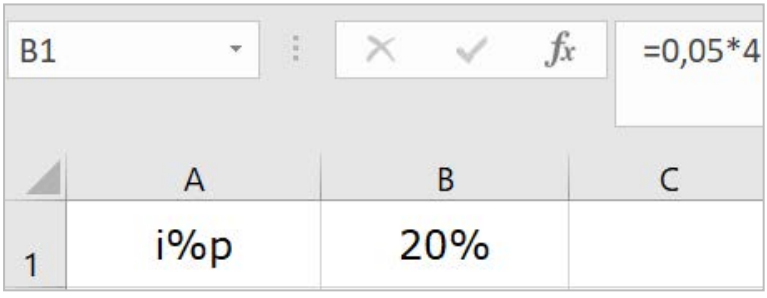
Ejemplo 2:

I%p: 5 % *TV* (trimestral vencida)

t: 4 trimestres

i %p = 0,05 * 4 = 0,20 = 20% *ATV* (anual trimestral vencida)

Figura 10. *Variables para conversión de tasas periódica trimestral a nominal anual*



Tasa nominal a periódica

Fórmula: *i%p = %in/t*

i%p: tasa periódica

i%n: tasa nominal

t: número de periodos

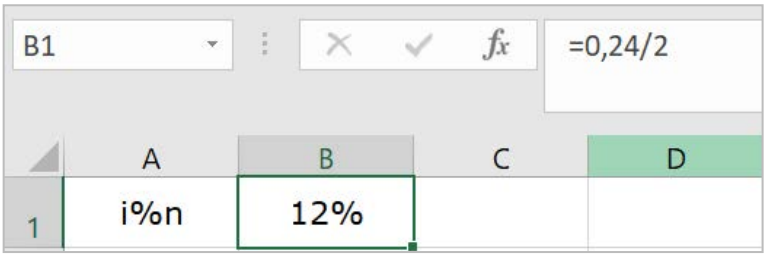
Ejemplo 1:

i%n: 24 *% ANV*

t: 2 *semestres*

i% p = 0,24 / 2 = 0,12 = 12 *% SV* (semestral vencida)

Figura 11. *Variables para conversión de tasas nominal anual a periódica semestral*



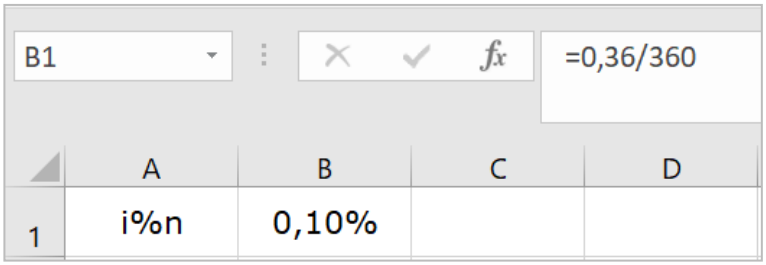
Ejemplo 2:

i%n: 36 % *ADV* (anual diaria vencida)

t: 360 días

i%p = 0,36 / 360 = 0,010 = 0,10 % *DV* (diaria vencida)

Figura 12. *Variables para conversión de tasas nominal anual a periódica diaria*



Tasa periódica a efectiva

Fórmula: $i\%EA = (1+i\%p)^{t-1}$

I%EA: tasa efectiva anual

I%p: tasa periódica

n: número de periodos

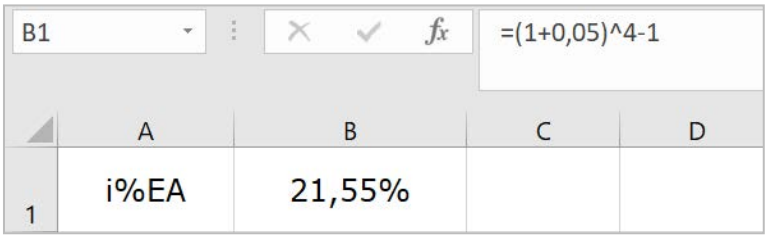
Ejemplo 1:

i%p: 5 % TV (trimestral vencida)

t: 4 trimestres

$i\%EA = (1+0{,}05)^{4-1} = 0{,}2155 = 21{,}55\ \%\ EA$

Figura 13. *Variables para conversión de tasas periódica trimestral a efectiva anual*



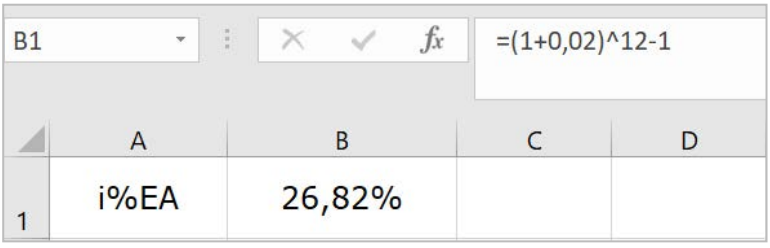
Ejemplo 2:

i%p: 2 *% MV* (mensual vencida)

t: 12 meses

$i\%EA = (1+0{,}02)^{12-1} = 0{,}2882 = 28{,}82\ \%\ EA$

Figura 14. *Variables para conversión de tasas periódica mensual a efectiva anual*



Tasa anual a periódica

Fórmula: $i\%p = (1+i\%EA)^{(1/t)-1}$

$i\ \%\ p$: tasa periódica

$i\ \%\ EA$: tasa efectiva anual

t: número de periodos

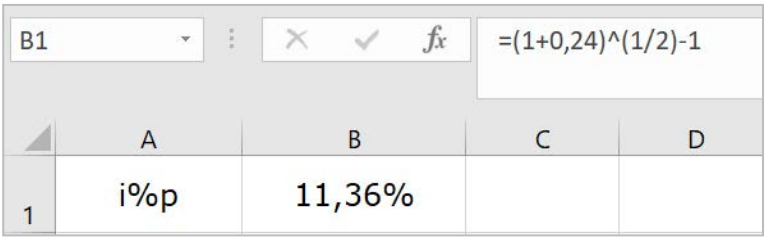
Ejemplo 1:

$i\%EA$: 24% EA

t: 2

$i\ \%\ p = (1 + 0{,}24)^{(1\ /\ 2)\ -1} = 0{,}1136 = 11{,}36\%$ SV (semestral vencido)

Figura 15. *Variables para conversión de tasas efectiva anual a periódica semestral*



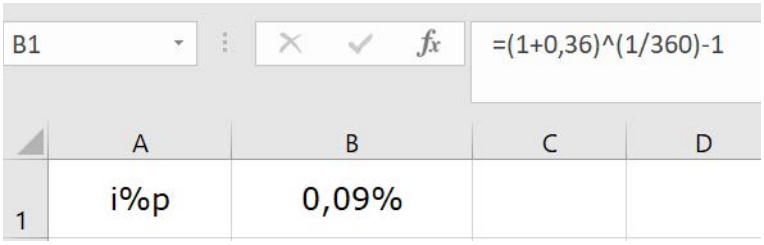
Ejemplo 2:

$i\ \%\ EA$: 36 % EA

t : 360

$i\ \%\ p$ = (1 + 0,36) ^ (1 / 360) -1 = 0,09 % DV (diario vencido)

Figura 16. *Variables para conversión de tasas efectiva anual a periódica diaria*



Tasas indexadas y deflactadas

Introducción

La incertidumbre económica y la variabilidad de los factores externos son una constante en el mundo financiero. Estas fluctuaciones afectan la estabilidad de los precios, el valor del dinero y la planificación de inversiones y créditos. En este contexto, las tasas indexadas y las tasas deflactadas juegan un papel esencial para mitigar los efectos de la inflación y preservar el poder adquisitivo de los activos y pasivos financieros.

El uso de estas herramientas permite una mejor gestión de riesgos y facilita la toma de decisiones informadas en distintos sectores de la economía. Comprender su funcionamiento es clave para cualquier persona o entidad que desee evaluar con precisión la rentabilidad de sus inversiones o la viabilidad de sus proyectos financieros.

Objetivo

Proporcionar una comprensión clara y detallada de las tasas indexadas y deflactadas, explicando sus fundamentos, fórmulas de cálculo y aplicaciones en el ámbito financiero. Se busca que los lectores, adquieran los conocimientos necesarios para interpretar y utilizar estas tasas de manera efectiva en la toma de decisiones económicas.

A lo largo del capítulo, se presentarán ejemplos prácticos, se analizarán casos de uso y se explicará la relación entre ambas tasas en distintos escenarios financieros. Con

ello, se pretende dotar al lector de herramientas para realizar evaluaciones financieras más precisas y enfrentar con mayor seguridad las variaciones económicas.

Tasas indexadas

Definición y principios fundamentales

Las tasas indexadas son aquellas que se ajustan de manera periódica en función de un indicador económico de referencia. Su principal objetivo es mitigar los efectos de la inflación y garantizar que los pagos o inversiones mantengan su poder adquisitivo a lo largo del tiempo. Se utilizan en diversos contratos financieros, incluyendo préstamos, bonos y arrendamientos (Banco de la República, s.f.-a). *¿Qué es indexación y cuáles son los mecanismos de indexación que existen?* Banco de la República de Colombia

El principio fundamental de las tasas indexadas radica en su estructura de cálculo, la cual se basa en la combinación de una tasa base y un margen fijo. La tasa base suele estar determinada por un índice de referencia, como la DTF, el IPC o la UVR, en Colombia. Este mecanismo permite una mayor estabilidad financiera al reducir la incertidumbre asociada a cambios inesperados en la inflación o las tasas de interés.

Fórmula y cálculo

La fórmula general utilizada para el cálculo de una tasa indexada es a través de la ecuación de Fisher, usando:

i para la tasa nominal.

r para la tasa real.

Π^e para la tasa de inflación esperada.

$$i = r + \Pi^e$$

i para la tasa nominal, r para la tasa real y πe para la tasa de inflación esperada: $i \approx r + \pi e$

Tasa indexada = Tasa base + margen fijo

Donde la tasa base se define como el índice de referencia utilizado para determinar la variabilidad del instrumento financiero, mientras que el margen fijo corresponde a un componente predeterminado en el contrato. Esta estructura permite ajustar el rendimiento o costo financiero a las condiciones económicas vigentes

Ejemplo 1: préstamo con tasa indexada a la UVR

Un banco ofrece un crédito hipotecario con una tasa indexada a la UVR + 5,2 % EA. Actualmente, la UVR tiene un valor de 3,9 % EA.

Preguntas:

¿Cuál será la tasa de interés total aplicable al préstamo?

Si el cliente solicita un crédito de $150.000.000 y debe pagarlo en un año con intereses compuestos, ¿cuál será el monto total para pagar?

Solución:

a. La tasa del crédito es:

Tasa indexada = UVR + Margen fijo = 3,9 % + 5,2 % = 9,1 % EA

b. El monto total para pagar se calcula con la fórmula del interés compuesto:

$$M = P(1 + r)t$$

donde:

$P = 150.000.000$ COP

$r = 0{,}091\text{r} = 0{,}091\text{r} = 0{,}091$ (9,1 % en decimal)

$$t = 1t = 1t = 1 \text{ año}$$

$$M = 150.000.000\ (1{,}091) = 163.650.000\ \text{COP}$$

Respuesta: la tasa final es 9,1 % EA y el monto total a pagar es $163.650.000.

Ejercicio 2: cálculo de una tasa indexada con IPC

Una empresa firma un contrato de arrendamiento cuyo incremento anual está indexado al IPC más un 2,5 %. Si el IPC del año es 4,8 %, ¿cuál será la nueva tasa de ajuste del arriendo?

Solución:

Tasa indexada = IPC + Margen fijo = 4,8 % + 2,5 % = 7,3 %

Respuesta: la tasa de ajuste anual del arriendo será del 7,3 %.

Tasas deflactadas

Definición y principios fundamentales

Las tasas deflactadas, también denominadas tasas reales, representan el verdadero rendimiento de una inversión o el costo real de un financiamiento después de descontar los efectos de la inflación. Mientras que las tasas nominales reflejan el porcentaje de interés sin ajustes, las tasas deflactadas permiten evaluar el impacto económico real de una operación financiera (Banco de la República, s.f.-b).*Tasa de interés DTF.*

Fórmula y cálculo

Fórmula para calcular la tasa real:

$$\text{Tasa real} = [(1 + \text{tasa nominal}) / (1 + \text{tasa de inflación})] - 1$$

Ejemplo 3: cálculo de la tasa real en un CDT

Un inversionista coloca su dinero en un CDT con una tasa nominal del 11 % EA, pero la inflación anual es del 6,2 %.

Paso 1. Aplicar la fórmula de la tasa real

$$Tasa\ real = (1 + 0{,}11) / (1 + 0{,}062) - 1$$

Cálculo:

$$\text{Tasa real} = 1{,}11 / 1{,}062 - 1 = 0{,}0451 = 4{,}51\ \%$$

Paso 2. Calcular el valor real de la inversión

Si invierte $80.000.000, el valor real de la inversión al final del año sería:

$$V = 80.000.000\ (1{,}0451)$$

Cálculo:

$$V = 83.608.000\ \text{COP}$$

Tabla 1. *Relación entre tasas indexadas y deflactadas*

Característica	Tasas indexadas	Tasas deflactadas
Definición	Ajuste basado en un índice económico (IPC, DTF, UVR)	Eliminación del efecto de la inflación
Propósito	Mantener el valor de un activo frente a cambios económicos	Determinar el valor real de una variable económica
Ejemplo	Préstamos indexados a la UVR	Cálculo de tasa de interés real
Cálculo	Basado en una tasa base más un margen fijo	Se usa la fórmula de deflación

Uso conjunto

Las tasas indexadas y deflactadas pueden emplearse juntas en estrategias de inversión y financiación.

Aplicaciones de tasas indexadas y deflactadas

Financiamiento de proyectos con inflación variable: las tasas indexadas y deflactadas son clave en la evaluación de proyectos, especialmente aquellos con horizontes de tiempo largos, donde la inflación puede afectar significativamente los costos y beneficios. Al utilizar tasas indexadas, se pueden estimar flujos de caja ajustados a la inflación, mientras que, con tasas deflactadas, se obtiene una visión realista del rendimiento del proyecto.

Inversiones en activos ligados a la inflación: los inversionistas utilizan tasas indexadas para protegerse de la inflación. Por ejemplo, los bonos ligados a la inflación ajustan sus pagos de interés según el IPC, garantizando que el inversionista no pierda poder adquisitivo con el tiempo. Por otro lado, las tasas deflactadas permiten evaluar el rendimiento real de estos activos, comparándolos con otras alternativas de inversión.

Impacto en el crédito y préstamos: los préstamos indexados permiten que las instituciones financieras ajusten las tasas de interés según la inflación, asegurando que el valor real del capital prestado se mantenga constante. En cambio, las tasas deflactadas se emplean para calcular la carga real del crédito sobre el deudor, facilitando la toma de decisiones informadas.

Planeación económica y presupuestaria: empresas y gobiernos utilizan tasas indexadas y deflactadas para hacer proyecciones presupuestarias realistas. Mientras que las tasas indexadas ajustan los costos y precios según la inflación, las tasas deflactadas permiten evaluar el crecimiento económico en términos reales, evitando distorsiones causadas por cambios nominales en los precios.

Aplicaciones en seguros y pensiones: las aseguradoras y los fondos de pensiones utilizan tasas indexadas para garantizar que los pagos futuros mantengan su valor adquisitivo. Al mismo tiempo, las tasas deflactadas ayudan a calcular el rendimiento

real de las inversiones en fondos de retiro, asegurando que los beneficiarios reciban pagos adecuados en el futuro.

Estas aplicaciones demuestran la importancia de comprender y aplicar correctamente las tasas indexadas y deflactadas en distintos ámbitos económicos y financieros.

Conclusión

Las tasas indexadas y deflactadas son herramientas fundamentales para la gestión financiera en un entorno económico dinámico. A lo largo de este capítulo, hemos explorado sus definiciones, cálculos y aplicaciones en diversos ámbitos como inversiones, créditos y planeación económica.

El uso adecuado de estas tasas permite a los agentes económicos tomar decisiones informadas que protejan el valor de sus activos y obligaciones frente a la inflación y otros factores económicos. Mientras que las tasas indexadas garantizan que los valores financieros se ajusten a la evolución de índices de referencia, las tasas deflactadas permiten medir con precisión el poder adquisitivo real del dinero en el tiempo.

En conclusión, comprender y aplicar correctamente estas tasas es clave para evaluar proyectos, gestionar riesgos y diseñar estrategias financieras eficientes que contribuyan a la estabilidad económica, tanto a nivel individual como empresarial y gubernamental.

Referencias

Agudelo R., D. A., Pachón, M., Quintanilla, H. y Fernández G., A. F. (2019). Matemáticas financieras: *conceptos y aplicaciones*. Pearson Educación. https://www-ebooks7-24-com.bibliotecavirtual.unad.edu.co/?il=7897

Banco de la República. (s.f -a). ¿Qué es indexación y cuáles son los mecanismos de indexación que existen? https://www.banrep.gov.co/es/preguntas-frecuentes/indexacion-mecanismos-existen

Banco de la República. (s.f -b). Tasa de interés DTF. https://www.banrep.gov.co/es/glosario/tasa-interes-dtf

Banco de la República. (2024d). Tasa de interés en Colombia. https://www.banrep.gov.co/es/tasa-interes-colombia

Brealey, R. A., Myers, S. C. y Allen, F. (2019). *Principios de finanzas corporativas* (13.ª ed.). McGraw-Hill Education.

Escobar, G. (2020). *Guía matemáticas financieras*. (1.ª ed). Editorial UAM. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/175093

Gitman, L. J. y Zutter, C. J. (2015). *Principles of Managerial Finance* (14th ed.). Pearson.

Gutiérrez Banegas, M. (2020). *Matemáticas financieras*. (1.ª ed.). Instituto Mexicano de Contadores Públicos. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/130920

Ross, S. A., Westerfield, R. W. y Jordan, B. D. (2018). *Fundamentals of Corporate Finance* (12th ed.). McGraw-Hill Education.



Capítulo 3

Series uniformes y gradientes

Series uniformes

Series uniformes vencidas

Según Aguilera Gómez y Díaz Mata (2020), las *series uniformes vencidas*, también llamadas *anualidades vencidas*, se caracterizan por ser una secuencia de pagos de igual monto que se efectúan al finalizar cada periodo acordado, lo cual facilita la planificación de cuotas en operaciones de financiamiento, como arrendamientos o préstamos. Además, estos autores señalan que la previsión de desembolsos periódicos simplifica la administración de los recursos, al permitir estimar con mayor exactitud los compromisos que se van adquiriendo. Por consiguiente, la periodicidad establecida en cada pago

genera certidumbre en el flujo de efectivo y contribuye al orden en la ejecución de los planes de inversión. Según la bibliografía usada por nosotros, se advierte que esta regularidad en la estructura de pagos potencia la eficiencia en la toma de decisiones financieras y reduce riesgos de morosidad. Así, definimos que las ***series uniformes vencidas*** son un conjunto de pagos idénticos que ocurren al cierre de cada intervalo establecido, brindando estabilidad y claridad en la gestión de obligaciones monetarias.

Ecuación 1. Fórmula del valor presente de una anualidad

$$\left[P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]\right] \text{ y } P = A(P/A, i\%, n)$$

Fuente: *elaborado a partir de Meza Orozco (2013).*

Ecuación 2. Fórmula del valor futuro de una anualidad

$$\left[F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]\right] \text{ y } F = A(F/A, i\%, n)$$

Fuente: *elaborado a partir de Meza Orozco (2013).*

Series uniformes anticipadas

Cárdenas Escobar y Cárdenas Escobar (2024) destacan que las series uniformes anticipadas resultan fundamentales para representar pagos que se efectúan al inicio de cada periodo, lo cual es clave en escenarios como el arrendamiento financiero o las rentas adelantadas. Dicho autor complementa esta visión explicando que, a diferencia de las anualidades ordinarias, las anticipadas exigen ajustar el factor de valor presente o futuro mediante la multiplicación por $(1+i)(1+i)(1+i)$, debido a que cada flujo se encuentra desplazado un periodo hacia el presente. Por su parte, Agudelo y Fernández (2019) enfatizan que este tipo de serie se encuentra con frecuencia en contratos comerciales y pagos de servicios, y su tratamiento matemático requiere comprensión de la lógica temporal del dinero. Finalmente, Flórez Uribe (2015) señala que, aunque las fórmulas son similares a las de las anualidades ordinarias, su interpretación cambia en función del momento del primer flujo. Por ello, las series uniformes

anticipadas no solo tienen una aplicación técnica, sino que son parte esencial de la lectura financiera crítica en la toma de decisiones empresariales.

Revisada la bibliografía utilizada por nosotros, se observa la relevancia de las series variables para representar situaciones donde los abonos no son uniformes, sino que siguen un patrón progresivo o regresivo en intervalos equivalentes, lo que las convierte en una herramienta clave dentro del sistema financiero colombiano, pues su flexibilidad resulta fundamental para la banca, el mercado de capitales, las finanzas personales, entre otras. Esta versatilidad, al igual que las series uniformes anticipadas, fortalece la capacidad de análisis y proyección en contextos económicos dinámicos, permitiendo a los tomadores de decisiones evaluar con mayor precisión la viabilidad y rentabilidad de inversiones a mediano y largo plazo.

Ecuación 3. Fórmula del valor presente de una anualidad

$$\left[P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right](1+i) \right]$$

Fuente: *elaborado a partir de Meza Orozco (2013).*

Ecuación 4. Fórmula del valor futuro de una anualidad

$$\left[F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right](1+i) \right]$$

Fuente: *elaborado a partir de Meza Orozco (2013).*

Series uniformes diferidas

"Cárdenas Escobar y Cárdenas Escobar (2024) plantean que las series uniformes diferidas permiten representar escenarios en los que los pagos financieros no inician de forma inmediata, lo cual es útil para decisiones donde los flujos de caja comienzan tras un periodo de espera. Pabón Miranda (2023), desde un enfoque pedagógico, explica que para calcular el valor presente de estas series se deben usar factores compuestos que trasladen los flujos al inicio del primer pago y luego descontarlos

al presente. De manera similar, Aguilera Gómez y Díaz Mata (2020) destacan que este tipo de anualidades se aplican en contextos donde las inversiones no generan retornos instantáneos sino diferidos, como en proyectos con tiempos de maduración financiera. Finalmente, Flórez Uribe (2015) afirma que comprender este tipo de herramientas ayuda a evaluar con mayor precisión las alternativas económicas a lo largo del tiempo. Así, las series uniformes diferidas no solo aportan valor técnico, sino que fortalecen la planeación financiera en escenarios reales, dinámicos y orientados a la sostenibilidad.

Según la bibliografía utilizada por nosotros, se observa la relevancia de las series variables para representar situaciones donde los abonos no son uniformes, sino que siguen un patrón progresivo o regresivo en intervalos equivalentes, lo que las convierte en una herramienta clave dentro del sistema financiero colombiano, pues su flexibilidad resulta fundamental para la banca, el mercado de capitales, las finanzas personales, entre otras. Esta versatilidad, al igual que las series uniformes diferidas, fortalece la capacidad de análisis y proyección en contextos económicos dinámicos, permitiendo a los tomadores de decisiones evaluar con mayor precisión la viabilidad y rentabilidad de inversiones a mediano y largo plazo.

Ecuación 5. Fórmula del valor presente de una anualidad

$$\left[VP = \left[\frac{1-(1+i)^{-n}-1}{i} \right] \circ (1+i) \right]$$

Fuente: *elaborado a partir de Meza Orozco (2013).*

Ecuación 6. Fórmula del valor futuro de una anualidad

$$\left[VF = \left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i} \right] \circ (1+i)^{k} \right]$$

Fuente: *elaborado a partir de Meza Orozco (2013).*

Series uniformes perpetuas

Vidaurri Aguirre (2020) resalta que las series uniformes perpetuas son útiles para representar ingresos constantes que se proyectan indefinidamente, lo que permite valorar activos como rentas vitalicias o emisiones perpetuas de deuda. Cárdenas Escobar y Cárdenas Escobar (2024) coinciden en que este tipo de series facilita la evaluación de inversionesque no tienen una fecha de finalización, simplificando modelos de flujos constantes en contextos financieros sostenibles. López Sánchez y López Sánchez (2018) explican que su fórmula básica, P = A / i, se sustenta en la noción de una tasa de descuento aplicada de forma indefinida, siempre que se mantenga constante. Rodríguez Franco (2015) enfatiza su aplicación en la estimación de ingresos perpetuos para proyectos de infraestructura o fondos de inversión, donde los retornos se esperan de manera indefinida. A su vez, Meza Orozco (2013) amplía este enfoque indicando que, si bien las perpetuidades puras no existen en la práctica, representan una aproximación útil cuando los ingresos son estables en el largo plazo. También enfatizan que la simplicidad matemática de las perpetuidades es clave para introducir a los estudiantes en la comprensión del valor del dinero en horizontes temporales extensos. Así, las series perpetuas no solo cumplen una función teórica, sino que brindan soporte a decisiones estratégicas en finanzas corporativas y públicas.

Analizada la bibliografía utilizada por nosotros, se resalta la importancia de las series uniformes perpetuas como una herramienta clave para representar flujos constantes en el tiempo sin un horizonte definido, lo cual resulta fundamental en el análisis de instrumentos financieros como bonos perpetuos, rentas vitalicias o fondos de inversión permanentes. Su aplicación es especialmente valiosa dentro del sistema financiero colombiano, donde la estabilidad de ciertos ingresos proyectados a largo plazo exige modelos sencillos pero potentes de evaluación. Aunque las series variables también desempeñan un papel significativo al modelar abonos no uniformes que siguen un patrón progresivo o regresivo, las series perpetuas destacan por su capacidad de simplificar el análisis y facilitar decisiones estratégicas sostenidas en escenarios dinámicos. Esta versatilidad conceptual permite a los tomadores de decisiones proyectar con mayor claridad la viabilidad y rentabilidad de inversiones, sobre todo en contextos donde la continuidad del flujo de caja es una premisa.

Ecuación 7. Fórmula del valor presente de una anualidad

$$VP = \frac{A}{i}$$

Fuente: *elaborado a partir de Meza Orozco (2013).*

Ejemplos prácticos de series uniformes

Series uniformes vencidas

Ejemplo:

Juan paga $100 al final de cada mes durante 4 meses, con una tasa de interés mensual del 2 %.

Datos:

- $A = 100$
- $i = 0{,}02$
- $n = 4$

$P = 100 \times [((1 + 0{,}02)^{4-1}) / (0{,}02 \times (1 + 0{,}02)^4)]$

$P = 100 \times [(1{,}082432 - 1) / (0{,}02 \times 1{,}082432)]$

$P = 100 \times (0{,}082432 / 0{,}021649)$

$P = 100 \times 3{,}8077$

$P = 380{,}77$ (aproximadamente)

El valor presente de la serie uniforme vencida de $100 durante 4 meses al 2 % mensual es aproximadamente $380,77". Se sustituye el valor de $380,60, que provenía de un redondeo intermedio

Series uniformes anticipadas

Ejemplo:

Ana paga $200 al inicio de cada mes por 3 meses. La tasa mensual es del 1,5 % (0,015).

Datos:

- Pago periódico: $A = 200$
- Tasa de interés mensual: i = 0,015
- Número de pagos: n = 3
- Tipo de serie: anticipada (los pagos se hacen al inicio de cada periodo)

$$VP = 200 \times [(1 - (1 + 0{,}015)^{-3}) / 0{,}015] \times (1 + 0{,}015)$$

$$VP = 200 \times [(1 - 0{,}956317) / 0{,}015] \times 1{,}015$$

$$VP = 200 \times (0{,}043683 / 0{,}015) \times 1{,}015$$

$$VP = 200 \times 2{,}9122 \text{ x } 1{,}015$$

$$VP = 591{,}18 \text{ (aproximadamente)}$$

El valor presente de la serie uniforme anticipada es aproximadamente $599,75.

Series uniformes diferidas

Ejemplo:

Carlos empieza a pagar $150 mensuales durante 3 meses, luego de 2 meses sin pagar. Tasa de interés mensual: 2 % (0,02).

Datos:

Valor del pago periódico: $A = 1\ 50$

Tasa de interés mensual: $i = 0{,}02\ (2\ \%)$

Número de pagos: $n = 3$

Número de meses diferidos: $k = 2$

$$VP = 150 \times [(1 - (1 + 0{,}02)^{-3}) / 0{,}02] \times (1 + 0{,}02)^{-2}$$

$$VP = 150 \times [(1 - 0{,}942322) / 0{,}02] \times 0{,}9612$$

$$VP = 150 \times 2{,}8839 \times 0{,}9612$$

$$VP = 415{,}80 \text{ (aproximadamente)}$$

El valor presente de una serie uniforme de 3 pagos de $150, iniciando después de 2 meses, con una tasa de interés mensual del 2 %, es aproximadamente $415,80.

Series uniformes perpetuas

Ejemplo:

Sofía recibe $500 anuales para siempre. Tasa de interés anual: 5 % (0,05).

Datos:

- Valor del pago periódico: $A = 500$
- Tasa de interés anual: $i = 0{,}05\ (5\ \%)$
- Tipo de serie: perpetua (los pagos son indefinidos en el tiempo)

$$VP = 10.000$$

El valor presente de una renta perpetua que entrega $500 cada año de forma indefinida, con una tasa de interés del 5 % anual, es de $10.000.

Series variables

Según Pabón Miranda (2023) y Sosa Gómez (2023), las *series variables*, también denominadas *gradientes*, constituyen un conjunto de pagos periódicos que pueden incrementarse o disminuir según una ley de formación definida de antemano. Asimismo, Aguilera Gómez y Díaz Mata (2020) subrayan que dichas variaciones pueden expresarse mediante progresiones, ya sean aritméticas o geométricas, lo cual coincide con la idea de que los desembolsos cambian con base en un factor constante. Por su parte, Agudelo y Fernández (2019) enfatiza que estos incrementos obedecen a la necesidad de reflejar las variaciones reales de los flujos financieros a lo largo del tiempo, aspecto que las diferencia de las *anualidades*, donde el monto se mantiene fijo. A su vez, la propuesta de López Sánchez y López Sánchez (2018) contempla que estas estructuras financieras se adaptan con flexibilidad a múltiples escenarios económicos, pues cada pago, aunque periódico, evoluciona de manera sistemática.

Según la bibliografía utilizada por nosotros, se observa la relevancia de las series variables para representar situaciones donde los abonos no son uniformes sino que siguen un patrón progresivo o regresivo en intervalos equivalentes, lo que las convierte en una herramienta clave dentro del sistema financiero colombiano, pues su

flexibilidad resulta fundamental para la banca, el mercado de capitales, las finanzas personales, entre otras.

Ahora, apoyándonos en la clasificación propuesta por López Sánchez y López Sánchez (2018), observamos que las series variables se subdividen en cuatro modalidades, cada una de ellas siendo vencidas o anticipadas:

a. Gradiente lineal creciente

b. Gradiente lineal decreciente

c. Gradiente geométrico creciente

d. Gradiente geométrico decreciente

Cada categoría responde a una lógica específica de incremento o decremento absoluto y, por ello, exige tratamientos diferenciados cuando los pagos se programan al final del periodo (vencidos) o al inicio de este (anticipados).

Series variables aritméticas vencidas

Partiendo de lo indicado en la introducción a este subcapítulo recordamos que las series variables aritméticas se rigen por incrementos o decrementos absolutos que se aplican sucesivamente a los pagos; en este sentido, Sosa Gómez (2023) explica que la cuantía añadida o sustraída permanece constante a lo largo del tiempo, mientras que Pabón Miranda (2023) subraya que dicha variación opera desde el segundo periodo y puede orientarse tanto al alza como a la baja. Ahora bien, al trasladar la noción de vencimiento propuesta para el interés efectivo por Agudelo R y Fernández G. (2019) —quienes señalan que un flujo pagado "al final del periodo" se clasifica como vencido—, obtenemos que una serie variable aritmética vencida corresponde a un conjunto de pagos periódicos cuyo monto se ajusta en una cantidad fija y se liquida al término de cada intervalo pactado.

Ecuación 8. Fórmula del valor presente de una serie con gradiente aritmético creciente y pago vencido

$$P = A[1-(1+i)-ni] + Gi\,[1-(1+i)-ni-n(1+i)-n]$$
$$P = A_1-1+i-ni + Gi\;1-1+i-ni-n1+i-n$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

La ecuación 8 (Fórmula del valor presente de una serie con gradiente aritmético creciente y pago vencido) permite calcular el valor presente (P) de una serie de pagos que combina dos componentes: una parte fija (A) y una parte variable que aumenta en forma de gradiente aritmético (G), con pagos realizados al final de cada periodo, es decir, vencidos.

Ecuación 9. Primer término de la ecuación 5

$$A[1-(1+i)-ni]A_1-1+i-ni$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

La ecuación 9 (Primer término de la ecuación 5), representa el valor presente de una serie uniforme de pagos constantes (A), durante n periodos, a una tasa de interés periódica (i). Es decir, cuánto valen hoy todos los pagos iguales que se harán en el futuro.

Ecuación 10. Segundo término de la ecuación 5

$$Gi\,[1-(1+i)-ni-n\,(1+i)-n]\;Gi\;1-1+i-ni-n1+i-n$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

La ecuación 10 (Segundo término de la ecuación 5) corresponde al valor presente de un gradiente aritmético creciente. Este gradiente comienza en cero y en cada periodo se incrementa una cantidad fija (G): por ejemplo, el segundo pago será A+G, el tercero A+2*G, y así sucesivamente, hasta alcanzar A+(n−1)*G en el último periodo. La expresión dentro del corchete representa cómo se acumulan todos esos incrementos y se traen al valor presente utilizando la tasa de interés (i).

En conjunto, la ecuación 8 (Fórmula del valor presente de una serie con gradiente aritmético creciente y pago vencido) estima cuánto se necesita hoy para cubrir una serie de pagos que combinan una parte fija y una parte creciente en el tiempo, a una tasa de interés compuesta durante (n) periodos.

Ahora, en muchas situaciones financieras no se conoce directamente el valor de la anualidad base (A), sino que se parte del valor presente total (P), que resulta de una combinación entre pagos constantes y un gradiente creciente. En tales casos, es necesario determinar cuál debería ser ese valor fijo A que, acompañado de un incremento constante G, permita cubrir el monto total en n periodos a una tasa de interés periódica (i).

La fórmula que se presenta a continuación permite despejar el valor de la anualidad base (A) partiendo de la expresión del valor presente:

Ecuación 11. Fórmula para hallar el valor de la anualidad en una serie con gradiente creciente y pagos vencidos a partir del valor presente (P)

$$A = P - Gi[1-(1+i)-ni - n(1+i)-n]1-(1+i)-ni \; A = P - Gi1-1+i-ni-n1+i-n1-1+i-ni$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018)*

En esta fórmula:

- El numerador calcula la diferencia entre el valor presente total (P) y el valor presente del gradiente aritmético (G), es decir, elimina la parte que corresponde a los incrementos progresivos.

- El denominador corresponde al factor de valor presente de una anualidad ordinaria, el cual traduce cuánto vale hoy una serie de pagos constantes durante n periodos a una tasa i.

Así, la expresión entrega el valor que debe tener la cuota constante A para que, junto con los incrementos G, se logre cubrir el valor presente total P.

Este procedimiento es común en modelos financieros donde se proyectan pagos crecientes, como planes de amortización escalonados, estructuras salariales con incrementos anuales, o presupuestos de inversión progresivos.

Anteriormente se presentó la fórmula cuando la variable principal que se debía obtener era el valor presente (P). Ahora, se abordará la situación contraria: cuando se desea conocer el valor futuro (F) de una serie de pagos compuesta por una anualidad base constante (A), combinada con un gradiente aritmético creciente (G), bajo una tasa de interés periódica (i) y pagos efectuados al final de cada periodo.

Este tipo de cálculo permite estimar cuánto se acumulará al final de los n periodos, teniendo en cuenta tanto los pagos iguales como los incrementos periódicos. La fórmula correspondiente se expresa de la siguiente manera:

Ecuación 12. Fórmula del valor futuro de una serie con gradiente aritmético creciente y pago vencido

$$F = A\,[(1+i)n - 1i] + Gi\,[(1+i)n - 1i - n]\; F = A_1 + in - 1i + Gi1 + in - 1i - n$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

La ecuación 12 (Fórmula del valor futuro de una serie con gradiente aritmético creciente y pago vencido) permite determinar el valor acumulado al final de n periodos de una serie compuesta por pagos uniformes (A) y un gradiente aritmético creciente (G), bajo una tasa de interés (i). El primer componente calcula el valor futuro de los pagos constantes, mientras que el segundo componente incorpora el efecto acumulativo de los aumentos progresivos representados por el gradiente. Esta fórmula es útil para proyectar escenarios de inversión con aportes crecientes y pagos al final de cada periodo.

Ecuación 13. Primer término de la ecuación 9

$$A\,[(1+i)n-1i]A_1+in-1i$$

Ecuación 14. Segundo término de la ecuación 9

$$Gi\,[(1+i)n-1i-n]Gi1+in-1i-n$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

En consecuencia, cuando se conoce el valor futuro (F) que se desea acumular al finalizar una serie de pagos periódicos con incrementos constantes, es posible calcular el valor de la anualidad base (A) requerida. Esta cuota fija, combinada con un gradiente aritmético creciente (G), permitirá alcanzar el monto proyectado al final del periodo. Para ello, se parte de la fórmula general del valor futuro y se realiza el despeje algebraico de (A), obteniendo la siguiente expresión:

Ecuación 15. Fórmula para hallar el valor de la anualidad en una serie con gradiente creciente y pagos vencidos a partir del valor futuro (F)

$$A = F - Gi\,[(1+i)n-1i-n](1+i)n-1i$$
$$A = F - Gi\;1+in-1i-n1+in-1i$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

Después de haber desarrollado las fórmulas para series con gradiente creciente, se facilita la transición al caso decreciente, en el cual la estructura general de las expresiones se mantiene, y la única modificación consiste en cambiar el signo del segundo término, es decir, el componente correspondiente al gradiente (G). Mientras en el modelo creciente se suma este componente, en el modelo decreciente se resta, ya que los pagos se reducen progresivamente cada periodo. A continuación, se presentan las fórmulas ajustadas para este escenario:

Ecuación 16. Valor presente con gradiente decreciente y pagos vencidos

$$P = A[1-(1+\,i)-ni]-Gi[1-(1+i)-ni-n(1+i)-n]$$
$$P = A_1-1+\,i-ni-Gi1-1+i-ni-n1+i-n$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

Ecuación 17. Valor futuro con gradiente decreciente y pagos vencidos

$$F = A[(1+i)n-1i]-Gi[(1+i)n-1i-n]\;F = A_1+in-1i-Gi1+in-1i-n$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

Ecuación 18. Anualidad (A) a partir del valor presente (P) con gradiente decreciente

$$A = P+Gi\,[1-(1+i)-ni-n(1+i)-n]1-(1+i)-ni$$
$$A = P+Gi1-1+i-ni-n1+i-n1-1+i-ni$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

Ecuación 19. Anualidad (A) a partir del valor futuro (F) con gradiente decreciente

$$A = F+Gi\,[(1+i)n-1i-n](1+i)n-1i$$
$$A = F+Gi1+in-1i-n1+in-1i$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

Las ecuaciones 16, 17, 18 y 19 permiten modelar situaciones donde los pagos disminuyen en una cantidad fija G cada periodo, como ocurre en esquemas de amortización descendente, planes de pago con reducción progresiva o proyectos que inician con inversiones altas y decrecen con el tiempo. Aunque el cambio respecto al gradiente creciente es únicamente el signo del segundo término, este ajuste refleja completamente la naturaleza descendente del flujo.

Nota: Ahora bien, aunque la fórmula del valor presente permite despejar directamente la anualidad (A), no ocurre lo mismo cuando se desea calcular la tasa de interés (i) o el número de periodos (n). Esto se debe a que la ecuación contiene estas variables tanto en el denominador como en el exponente, lo cual la convierte en una ecuación trascendental. Por lo tanto, no es posible aislar algebraicamente ni $\mathbf{i}$ ni n.

Para resolver estos casos, se recomienda el uso de herramientas como Excel (funciones como TASA, N.PER, o la herramienta **Buscar Objetivo**) o una calculadora financiera, que permiten obtener soluciones mediante procedimientos iterativos o de modelación numérica. Un ejemplo aplicado de este procedimiento se presentará más adelante dentro del desarrollo del libro.

Series variables aritméticas anticipadas

La serie variable aritmética anticipada se conceptualiza formalmente como la contraparte directa, o la «inversa» en términos de temporalidad de liquidación, de la definición de un pago vencido, el cual, según la postulación de Agudelo y Fernández (2019), se realiza al final del periodo estipulado. Explorando esta inversión, definimos esta serie como un flujo de pagos que ocurren periódicamente, caracterizado por un valor nominal que evoluciona en una progresión aritmética —esto es, incrementándose o disminuyéndose en una cantidad constante en cada intervalo— y cuya cualidad definitoria y distintiva radica en que cada una de estas liquidaciones se efectúa sistemáticamente al inicio del periodo al que corresponde, contrastando fundamentalmente con la naturaleza de final-de-periodo del pago vencido.

Como se indicó anteriormente, las series variables aritméticas anticipadas se caracterizan porque los pagos se realizan al inicio de cada periodo, en lugar de al final (como en las series vencidas). Esto implica que, financieramente, cada flujo se encuentra un periodo más cerca del valor presente o del valor futuro, por lo que se requiere un ajuste multiplicando por el factor $(1+i)$.

A continuación, se presentan las principales fórmulas ajustadas para este tipo de series, tanto para gradiente creciente como para gradiente decreciente:

Ecuación 20. Valor presente con gradiente aritmético creciente anticipado

$$P = [\mathrm{A}(1-(1+i)-ni)+Gi(1-(1+i)-ni-n(1+i)-n)](1+i)$$
$$P = A_1-1+i-ni+Gi1-1+i-ni-n1+i-n1+i$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

Esta fórmula (ecuación 20) permite calcular el valor presente de una serie con pagos que aumentan en G cada periodo y se realizan al inicio de cada intervalo. La estructura es igual a la fórmula para pagos vencidos, con la corrección de capitalizar todo un periodo adicional.

Ecuación 21. Valor futuro con gradiente aritmético creciente anticipado

$$F = [A((1+i)n-1i)+Gi((1+i)n-1i-n)](1+i)$$
$$F = A_1+in-1i+Gi1+in-1i-n1+i$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

La ecuación 21 calcula el valor acumulado al final del periodo para una serie anticipada con pagos crecientes. La capitalización se aplica desde un periodo antes, por lo que se multiplica toda la expresión por (1+i).

Ecuación 22. Valor presente con gradiente aritmético decreciente anticipado

$$P = [A(1-(1+i)-ni)-Gi(1-(1+i)-ni-n(1+i)-n)](1+i)$$
$$P = A_1-1+i-ni-Gi1-1+i-ni-n1+i-n1+i$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

Esta fórmula (ecuación 22) permite estimar el valor presente cuando los pagos se reducen en G cada periodo, y dichos pagos se realizan al inicio de cada periodo. Se conserva la estructura de la fórmula vencida, pero con ajuste por anticipación.

Ecuación 23. Valor futuro con gradiente aritmético decreciente anticipado

$$F = [A((1+i)n-1i)-Gi((1+i)n-1i-n)](1+i)$$
$$F = A_1+in-1i-Gi1+in-1i-n1+i$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

La ecuación 23 estima el valor acumulado al final de una serie anticipada donde los pagos se van reduciendo progresivamente. La anticipación se refleja en la multiplicación por $(1+ i)$.

Ecuación 24. Cálculo de la anualidad (A) a partir del valor presente con gradiente creciente anticipado

$$A = P1+ i - Gi(1-(1+i)-ni-n(1+i)-n)1-(1+i)-ni$$
$$A = P1+ i - Gi1-1+i-ni-n1+i-n1-1+i-ni$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

Esta expresión (ecuación 24) permite calcular la anualidad base (A) en una serie anticipada con gradiente aritmético creciente, cuando se conoce el valor presente (P). Dado que los pagos se realizan al inicio de cada periodo, el valor presente se ajusta dividiéndolo entre ($1+i$). El componente del gradiente se descuenta también, y se resta del valor presente ajustado.

Ecuación 25. Anualidad (A) desde valor futuro con gradiente creciente anticipado

$$A=F1+i - Gi((1+i)n-1i-n)(1+i)n-1i$$
$$A=F1+i - Gi1+in-1i-n1+in-1i$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

La ecuación 25 permite hallar la anualidad base (A) cuando se conoce el valor futuro (F) que se desea alcanzar con una serie anticipada y creciente. El valor futuro se ajusta dividiéndolo entre ($1+i$), y luego se descuenta el valor futuro del gradiente creciente. Esta fórmula estima cuánto debe pagarse como base en cada periodo anticipado para acumular el valor proyectado.

Ecuación 26. Anualidad (A) desde valor presente con gradiente decreciente anticipado

$$A = P1+i+Gi\,(1-\,(1+i)\,-ni-n\,(1+i)-n)\,1-\,(1+i)-ni$$
$$A = P1+i+Gi1-1+i-ni-n1+i-n1-1+i-ni$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

La ecuación 26 calcula la anualidad (A) para una serie anticipada con gradiente decreciente, partiendo del valor presente (P). En este caso, el componente del gradiente se suma, dado que los pagos decrecientes implican que el valor base debe ser mayor.

Al igual que en las anteriores, el valor presente se divide entre $(1+i)$ para ajustarlo al momento del primer pago.

Ecuación 27. Anualidad (A) desde valor futuro con gradiente decreciente anticipado

$$A = F1+i+Gi\ ((1+i)n-1i-n)\ (1+i)\ n-1i$$
$$A = F1+i+Gi1+in-1i-n1+in-1i$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

La ecuación 27 determina la anualidad (A) cuando se conoce el valor futuro (F) de una serie anticipada y decreciente. El gradiente se suma porque los pagos se reducen con el tiempo, y la anualidad base debe compensar esa reducción. El valor futuro se ajusta para reflejar que los pagos se realizaron al inicio de cada periodo.

Ecuación 28. Anualidad (A) desde valor futuro con gradiente decreciente anticipado

$$A = F1+i+Gi((1+i)n-1i-n)(1+i)n-1i$$
$$A = F1+i+Gi1+in-1i-n1+in-1i$$

Fuente: *adaptado a partir de López Sánchez y López Sánchez (2018).*

Gradientes geométricos

A partir de las perspectivas de diversos autores, podemos construir una definición de los gradientes geométricos o series variables geométricas. Flórez Uribe (2015) describe el gradiente geométrico como una secuencia de pagos donde cada cuota se obtiene al multiplicar la cuota precedente por un factor constante de $(1+G)$, donde G representa la tasa de crecimiento o decrecimiento. En una línea similar, Meza Orozco (2013) se refiere al gradiente geométrico como una serie de pagos periódicos en la que cada pago sucesivo se incrementa o disminuye en un porcentaje fijo, dando lugar a gradientes crecientes o decrecientes, según la naturaleza de este porcentaje. Gutiérrez Carmona (2012) complementa estas ideas al señalar que, en esta clase de series, la magnitud de cada cuota está intrínsecamente ligada a la cuota inmediatamente anterior a través de una proporción constante, lo que subraya la dependencia secuencial inherente a los gradientes geométricos.

Por consiguiente, según la bibliografía consultada, definimos los gradientes geométricos como una corriente de pagos periódicos donde cada pago experimenta una variación proporcional constante con respecto al pago anterior, determinando así si la serie presenta un crecimiento o un decrecimiento a lo largo del tiempo.

Series variables geométricas vencidas

Partiendo de la conceptualización previa de las series variables geométricas, donde cada cuota evoluciona a una tasa constante respecto a la anterior, y considerando la naturaleza de las series vencidas que Aguilera Gómez y Díaz Mata (2020) describieron como pagos que se realizan al final de cada periodo, podemos definir las series variables geométricas vencidas. En este tipo de series, al igual que en las anualidades vencidas señaladas por Aguilera Gómez y Díaz Mata (2020), los pagos que varían geométricamente se efectúan al término de cada uno de los periodos establecidos. Así, la característica fundamental radica en la combinación de la variación proporcional de las cuotas, tal como lo expusieron Flórez Uribe (2015), Gutiérrez Carmona (2012) y Meza Orozco (2013), con el momento de pago al final del periodo, siguiendo la lógica de las series vencidas.

Por lo tanto, según la línea de pensamiento que hemos venido desarrollando en este texto, las series variables geométricas vencidas constituyen una secuencia de pagos que cambian en una razón constante y se hacen efectivos al finalizar cada intervalo de tiempo definido.

Para adentrarnos en la formulación de los gradientes geométricos, es pertinente iniciar describiendo la progresión de sus pagos. En un escenario de gradiente creciente, tal como lo describe Flórez Uribe (2015), el primer pago se denota como A_1, el segundo pago será $A_1(1+G)$, el tercero corresponderá a $A_1(1+G)_2$, y así sucesivamente hasta el último pago, que alcanzará el valor de $A_1(1+G)n-1$.

En este orden de ideas, para definir la fórmula que se debe aplicar en el cálculo del valor presente o futuro de un gradiente geométrico, resulta fundamental considerar la relación entre la tasa de crecimiento geométrica (G) y la tasa de interés del periodo (i). Tal como lo señala Flórez Uribe (2015), si la tasa del gradiente geométrico es igual a la tasa de interés ($G = i$), el valor presente (P) se determinará mediante la expresión:

Ecuación 29. Valor presente de un gradiente geométrico vencido ($i = G$)

$$P = A_1 \cdot n \cdot (1+i) - 1 \; P = A_1 \cdot n \cdot 1 + i - 1$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

Ecuación 30. Valor presente de un gradiente geométrico vencido ($i <> G$)

$$P = A_1[(1+G)n \cdot (1+i) - n - 1G - i]$$
$$P = A_1 1 + Gn \cdot 1 + i - n - 1G - i$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

La forma en que la fórmula general para el valor presente de un gradiente geométrico vencido (cuando $i <> G$) se aplica tanto a gradientes crecientes como decrecientes es a través del signo que se asigna al valor de G (la tasa de crecimiento o decrecimiento geométrica).

Gradiente creciente: si la serie de pagos está aumentando en una proporción constante, el valor de G será positivo. Por ejemplo, si cada pago es un 3% mayor que el anterior, entonces $G = 0{,}03$. Al sustituir este valor positivo en la fórmula, el resultado del cálculo del valor presente reflejará esta tendencia creciente.

Gradiente decreciente: si la serie de pagos está disminuyendo en una proporción constante, el valor de G será negativo. Por ejemplo, si cada pago es un 5 % menor que el anterior, entonces $G = -0{,}05$. Al sustituir este valor negativo en la fórmula, la estructura de la ecuación se ajusta para tener en cuenta esta disminución en los pagos futuros, lo que afectará el valor presente calculado.

Continuando con el cálculo del valor futuro, cuando se conoce el valor del primer pago (A_1) y se desea hallar el monto futuro (F) de una serie variable geométrica vencida, Flórez Uribe (2015) nos proporciona dos escenarios, dependiendo de la relación entre la tasa de crecimiento geométrica (G) y la tasa de interés del periodo (i).

En primer lugar, si la tasa del gradiente geométrico es igual a la tasa de interés ($G = i$), el valor futuro (F) se determina mediante la siguiente expresión:

Ecuación 31. Valor futuro de un gradiente geométrico vencido ($i = G$)

$$F = A_1 \cdot n \cdot (1+i)n-1$$
$$F = A_1 \cdot n \cdot 1+in-1$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

En segundo lugar, cuando la tasa del gradiente geométrico es diferente a la tasa de interés ($G <> i$), el valor futuro (F) se calcula utilizando la fórmula que se presenta a continuación.

Ecuación 32. Valor futuro de un gradiente geométrico vencido ($i <> G$)

$$F = A_1 \left[(1+ G)n - (1+i) \text{ n } G - \text{i}\right]$$
$$F = A_1 1+Gn-1+inG - i$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

Respecto a esta fórmula, se aplica tanto para gradientes crecientes como decrecientes a través del signo de G. La lógica que aplicamos para la fórmula del valor presente (P) también es válida para la fórmula del valor futuro (F) cuando $i <> G$:

Ahora bien, más allá del cálculo del valor presente y futuro, en ocasiones resulta necesario determinar el valor de un pago específico dentro de la serie geométrica o incluso la cantidad de periodos que comprende la operación financiera.

En primer lugar, para calcular el valor del pago en el periodo n (An), considerando un primer pago A_1 y una tasa de crecimiento geométrica G, se tienen las siguientes expresiones:

Si el gradiente geométrico es creciente:

Ecuación 33. Anualidad (A) cuando el gradiente geométrico es creciente

$$An = A_1(1+G)n-1$$
$$An = A_1 1+Gn-1$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

Si el gradiente geométrico es decreciente:

Ecuación 34. Anualidad (A) cuando el gradiente geométrico es decreciente

$$An = A_1(1 - G)n-1$$
$$An = A_1 1 - Gn-1$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

En segundo lugar, para determinar el número de periodos (n) en función del valor presente (P), el primer pago (A_1), la tasa de crecimiento geométrica (G) y la tasa de interés (i), se presenta la siguiente fórmula:

Ecuación 35. Cálculo de número de periodos con gradientes geométricos

$$n = log\,[P\,(G - i) + A_1] - log\,(A_1)\,log\,(1+G) - log\,(1+i)$$
$$n = log\,f\,(PG-i) + A_1 - log\,f\,(A_1)\,log\,f\,(1+G) - log\,(1+i)$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

Estas fórmulas complementan el análisis de los gradientes geométricos, permitiéndonos no solo valorar la serie en un punto específico del tiempo, sino también comprender la dinámica de sus pagos individuales y la duración de la operación financiera.

Series variables geométricas anticipadas

Ahora, para adentrarnos en las series variables geométricas anticipadas, es crucial recordar la naturaleza fundamental de los gradientes geométricos que hemos definido previamente, donde cada pago sucesivo se modifica por una razón constante. Al considerar el momento de realización de estos pagos, podemos distinguir las series anticipadas. Si bien Aguilera Gómez y Díaz Mata (2020) se centraron en las series vencidas, aludiendo a pagos al final de cada periodo, la lógica nos lleva a inferir que las series uniformes anticipadas implican pagos al inicio del periodo. Al fusionar estas dos ideas, y en concordancia con las definiciones de gradientes geométricos presentadas por Flórez Uribe (2015), Gutiérrez Carmona (2012) y Meza Orozco (2013), las series variables geométricas anticipadas se conFiguran como una secuencia de

pagos que experimentan una variación proporcional constante y se efectúan al comienzo de cada periodo establecido. En este sentido, siguiendo la línea de nuestro análisis, la característica distintiva de esta clase de series financieras radica en la ocurrencia anticipada de cada una de las cuotas variables.

Ergo, el concepto fundamental de los gradientes geométricos anticipados es análogo al de los gradientes geométricos vencidos; la única diferencia radica en que los pagos se realizan al inicio de cada periodo en lugar de al final. Esta anticipación en el tiempo de los flujos de efectivo impacta directamente en las fórmulas de valoración.

Adaptando las fórmulas de Flórez Uribe (2015) para el valor presente y futuro de gradientes geométricos, considerando ahora que los pagos se efectúan al inicio de cada periodo, obtenemos las siguientes expresiones:

Ecuación 36. Valor presente de un gradiente geométrico anticipado ($i <> G$)

$$P = A_1[[[1-(1+G_1+i)\,ni-G]]](1+i)\;P = A_1 1-1+G_1+ini-G_1+i$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

Para convertir la fórmula del valor presente vencido a anticipado, multiplicamos la fórmula por $(1+i)$:

Ecuación 37. Valor presente de un gradiente geométrico anticipado ($i = G$)

$$P = A1[n1+i](1+i) = A1\cdot n\;P = A1nl+i1+i = A1\cdot n$$

Fuente: *Adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

Ecuación 38. Valor futuro de un gradiente geométrico anticipado ($i <> G$)

$$F = A_1[(1+G)n-(1+i)\,nG-i](1+i)\;F = A_1 1+Gn-1+inG-i1+i$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

Ecuación 39. Valor futuro de un gradiente geométrico anticipado ($i = G$)

$$F = A_1 \cdot n \cdot (1+i)n - 1(1+i) = A_1 \cdot n \cdot (1+i)n \; F = A_1 \cdot n \cdot 1 + in - 11 + i = A_1 \cdot n \cdot 1 + in$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

Para calcular el valor del primer pago (A_1) en un gradiente geométrico anticipado, podemos despejarlo de las fórmulas del valor presente o del valor futuro que ya hemos establecido para series anticipadas.

Ecuación 40. Despejando A_1 de la fórmula del valor presente de un gradiente geométrico anticipado ($i <> G$)

$$A_1 = P\left[\left[\left[i - G(1+i)(1-(1+G_1+i)n)\right]\right]\right] A_1 = Pi - G_1 + i \; 1 - 1 + G_1 + in$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

Ecuación 41. Despejando A_1 de la fórmula del valor presente de un gradiente geométrico anticipado ($i = G$)

$$A_1 = PnA_1 = Pn$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

Ecuación 42. Despejando A_1 de la fórmula del valor futuro de un gradiente geométrico anticipado ($i <> G$)

$$A_1 = F[G - i(1+i)((1+G)n - (1+i)n)] A_1 = FG - i1 + i1 + Gn - 1 + in$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

Ecuación 43. Despejando A_1 de la fórmula del valor futuro de un gradiente geométrico anticipado ($i = G$)

$$A_1 = Fn \cdot (1+i)n \; A_1 = Fn \cdot 1 + in$$

Fuente: *adaptado a partir de Flórez Uribe (2015).*

Ejemplos prácticos de gradientes lineales y geométricos

A lo largo de este capítulo, hemos construido una base teórica sólida sobre los gradientes, tanto lineales como geométricos, abordando sus modalidades de series vencidas y anticipadas a través de las perspectivas de diversos autores. Para facilitar la comprensión práctica de estos conceptos, a continuación, emplearemos herramientas disruptivas como Gemini, Chat GPT. Mediante el siguiente ***prompt***, generaremos ejemplos numéricos sencillos para ilustrar las diferencias entre gradientes lineales vencidos y anticipados, así como gradientes geométricos vencidos y anticipados, permitiendo a los lectores visualizar de manera clara su aplicación en escenarios financieros concretos.

El ***prompt*** específico que se proporcionará a estas herramientas para generar los ejemplos prácticos es el siguiente:

Prompt rol. Eres un tutor experto en matemáticas financieras especializado en la enseñanza práctica y clara de conceptos financieros complejos.

Contexto. Estás preparando material educativo para estudiantes universitarios de primer semestre en un curso introductorio de matemáticas financieras. Los estudiantes necesitan entender de manera práctica y sencilla los conceptos de gradientes lineales (aritméticos) y gradientes geométricos (porcentuales), tanto vencidos como anticipados.

Input. Explica de manera breve y clara los siguientes conceptos financieros: gradiente lineal vencido, gradiente lineal anticipado, gradiente geométrico vencido, gradiente geométrico anticipado. Luego, para cada concepto, presenta un ejemplo numérico sencillo que permita comprender la diferencia entre ellos, asegurándote de utilizar cantidades monetarias y periodos fáciles de seguir para los estudiantes.

Output (formato solicitado). Para cada tipo de gradiente —gradiente lineal vencido, gradiente lineal anticipado, gradiente geométrico vencido y gradiente geométrico anticipado— se solicita una explicación breve y un ejemplo numérico sencillo (de 3 a 4 periodos, máximo).

Este ***prompt*** detalla el rol de Gemini, el contexto educativo, los conceptos específicos que deben abordar, la necesidad de ejemplos numéricos sencillos y el formato de salida deseado para facilitar la comprensión de los gradientes por parte de los estudiantes.

Gradiente lineal vencido

Un gradiente lineal vencido es una serie de flujos de caja (pagos o depósitos) que ocurren al final de cada periodo, y cada flujo aumenta o disminuye en una cantidad monetaria constante con respecto al flujo anterior. El primer flujo de la serie no incluye el gradiente; este comienza a aplicarse a partir del segundo flujo.

- A (o A_1): es el valor del primer flujo de caja, que ocurre al final del primer periodo.
- g: es la cantidad constante en la que aumenta (si $G > 0$) o disminuye (si $G < 0$) cada flujo de caja subsiguiente.
- n: número de periodos.

El flujo de caja en un periodo k (F_k) se calcula como:

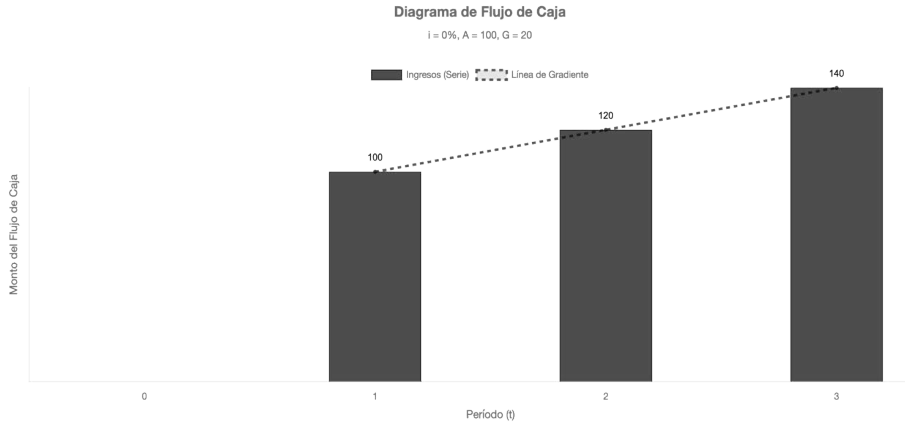
Ecuación 44. $F_k = A + (k-1)\,G$ para $k = 1,2,...,n.$

Ejemplo:

Supongamos que tienes un plan de ahorro donde tu primer depósito es de $100 al final del primer mes, y cada mes siguiente depositarás $20 más que el mes anterior, durante 3 meses.

- A = $100 (primer depósito)
- g = $20 (aumento constante mensual)

Figura 17. *Diagramación del gradiente aritmético creciente (ahorro: A = $100; g = $20)*



Fuente: *elaborado a partir del ejemplo de gradiente.*

Desglose de los depósitos (al final de cada mes):

- **Mes 1.** ***Ecuación 45.*** $F_1 = A + (1-1)\,G = \$100 + (0)\,\$20 = \$100$

  Este es el primer depósito base.

- **Mes 2.** ***Ecuación 46.*** $F_2 = A + (2-1)\,G = \$100 + (1)\,\$20 = \$120$

  El depósito aumenta en $G = \$20$.

- **Mes 3.** ***Ecuación 47.*** $F_3 = A + (3-1)\,G = \$100 + (2)\,\$20 = \$140$

  El depósito vuelve a aumentar en G = $20 respecto al mes anterior.

Los flujos de caja vencidos son: $100 (fin mes 1), $120 (fin mes 2), $140 (fin mes 3).

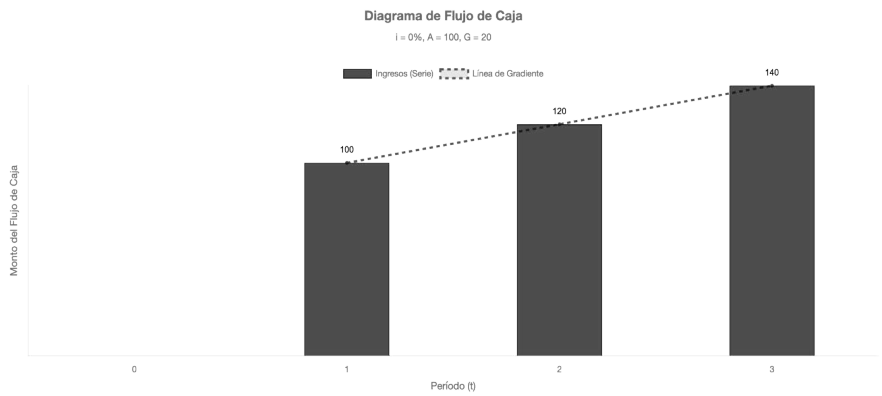
Gradiente lineal anticipado:

Un gradiente lineal anticipado es similar al vencido, pero los flujos de caja ocurren al inicio de cada periodo. Cada flujo aumenta o disminuye en una cantidad monetaria

constante con respecto al flujo anterior. El primer flujo, que ocurre al inicio del primer periodo (tiempo 0), no incluye el gradiente; este comienza a aplicarse a partir del segundo flujo (inicio del segundo periodo).

- A (o $A0$): es el valor del primer flujo de caja, que ocurre al inicio del primer periodo (tiempo 0).
- g: es la cantidad constante en la que aumenta (si $G > 0$) o disminuye (si $G < 0$) cada flujo de caja subsiguiente.
- n: número de periodos.
- El flujo de caja al inicio del periodo k (tiempo $k-1$) se calcula como: Ecuación 48. $Fk-1 = A + (k-1)\,G$ para $k = 1,2,...,n$.

Figura 18. *Diagramación de una serie con gradiente aritmético (esquema general)*



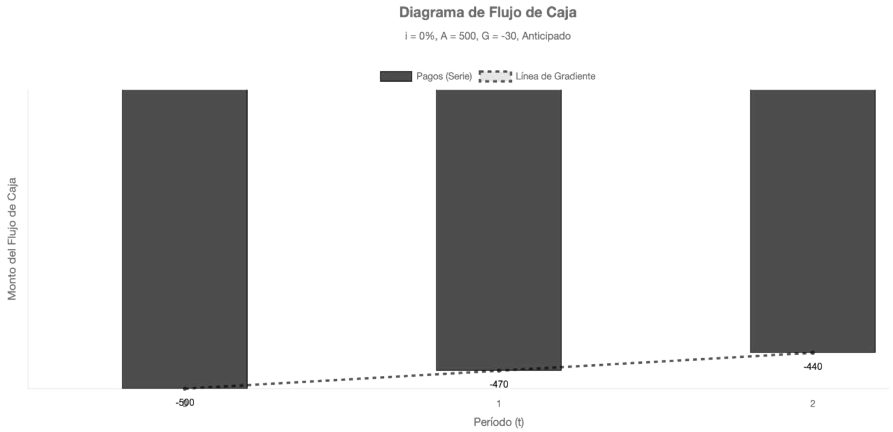
Fuente: *elaborado a partir del ejemplo de gradiente.*

Ejemplo:

Imagina que pagas un alquiler. El primer pago es de $500 al inicio del primer mes, y cada mes siguiente el pago disminuirá en $30, durante 3 meses.

- $A = \$500$ (primer depósito)
- $g = -\$30$ (disminución constante mensual)

Figura 19. *Diagramación del ejemplo de gradiente decreciente (A = $500; g = –$30)*



Fuente: *elaborado a partir del ejemplo de gradiente.*

Desglose de los pagos (al inicio de cada mes):

- **Inicio Mes 1 (Tiempo 0). Ecuación 49.**
  $F_0 = A + (1 - 1)\, G = \$500 + (0) - \$30 = \$500$

Este es el primer pago base.

- **Inicio Mes 2 (Tiempo 1). Ecuación 50.**
  $F_1 = A + (2 - 1)\, G = \$500 + (1) - \$30 = \$470$

El pago disminuye en $G = \$30$.

- **Inicio Mes 3 (Tiempo 2. Ecuación 51.**
  $F_2 = A + (3 - 1)\, G = \$500 + (3) - \$30 = \$440$

El pago vuelve a disminuir en $G = \$30$ respecto al mes anterior.

Los flujos de caja anticipados son: $500 (inicio mes 1), $470 (inicio mes 2), $440 (inicio mes 3).

Gradiente geométrico vencido

Un gradiente geométrico vencido es una serie de flujos de caja que ocurren al final de cada periodo, y cada flujo aumenta o disminuye en un porcentaje constante con respecto al flujo anterior. El primer flujo no se ve afectado por este porcentaje de cambio.

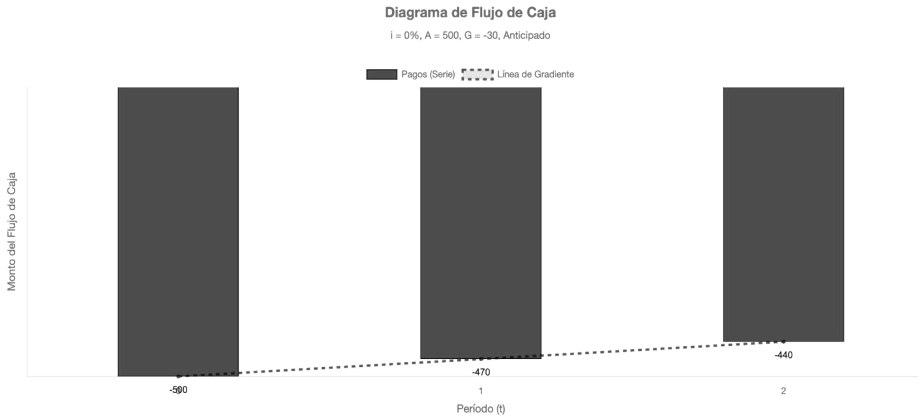
- A (o $A1$): es el valor del primer flujo de caja, que ocurre al final del primer periodo.
- g: es la tasa porcentual constante en la que aumenta (si $g < 0$) o disminuye (si $g < 0$) cada flujo de caja subsiguiente. Se expresa como decimal.
- n: número de periodos.
- El flujo de caja en un periodo k (Fk) se calcula como:
  Ecuación 52. $Fk = A\ (1 + g)\ k - 1$ para $k = 1,2,...,n.$

Ejemplo:

Supón que recibes una bonificación anual. La primera bonificación es de $1000 al final del primer año, y se espera que cada bonificación anual siguiente aumente en un 10 % con respecto a la del año anterior, durante 3 años.

- $A = \$1000$ (primera bonificación)
- $g = 10\ \% = 0,10$ (aumento porcentual anual)

Figura 20. *Diagramación del ejemplo de gradiente geométrico (bonificación: A = $1000; g = 10 %)*



Fuente: *elaborado a partir del ejemplo de gradiente.*

Desglose de las bonificaciones (al final de cada año):

- ***Ecuación 53.*** Año 1: $F_1 = A\ (1 + g)1{-}1 = \$1000\ (1 + 0.10)0 = \$1000 \times 1 = \$1000$

Esta es la primera bonificación base.

- ***Ecuación 54.*** Año 2: $F_2 = A\ (1 + g)\ 2 - 1 = \$1000\ (1 + 0{,}10)1 = \$1000 \times 1{,}10 = \$1100$

La bonificación aumenta un 10 % respecto al año anterior (1,00×0,10 = $100).

- ***Ecuación 55.*** Año 3: $F_3 = A\ (1 + g)\ 3{-}1 = \$1000\ (1 + 0{,}10)_2 = \$1000 \times 1{,}21 = \$1210$

La bonificación aumenta un 10 % respecto al año anterior $(1100 \times 0{,}10 = \$110)$.

Los flujos de caja vencidos son: $1000 (fin año 1), $1100 (fin año 2), $1210 (fin año 3).

Gradiente geométrico anticipado

Un gradiente geométrico anticipado es similar al vencido, pero los flujos de caja ocurren al inicio de cada periodo. Cada flujo aumenta o disminuye en un porcentaje constante con respecto al flujo anterior. El primer flujo, que ocurre al inicio del primer periodo (tiempo 0), no se ve afectado por este porcentaje de cambio.

- A (o $A0$): es el valor del primer flujo de caja, que ocurre al inicio del primer periodo (tiempo 0).
- g: es la tasa porcentual constante en la que aumenta (si $g > 0$) o disminuye (si $g < 0$) cada flujo de caja subsiguiente. Se expresa como decimal.
- n: número de periodos.

El flujo de caja al inicio del periodo k (tiempo $k-1$) se calcula como:

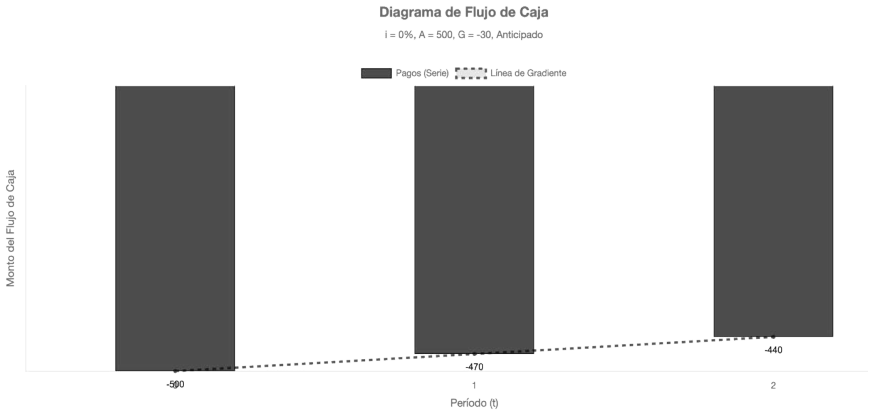
Ecuación 56. $Fk\text{-}1 = A\ (1 + g)\ k-1$ para $k = 1,2,...,n.$

Ejemplo:

Consideren que una suscripción a un servicio tiene un costo inicial de $50 al inicio del primer mes. Se anuncia que el precio subirá un 5 % cada mes, durante los próximos 3 meses.

- $A = \$50$ (costo inicial de suscripción)
- $g = 5\% = 0.05$ (aumento porcentual mensual)

Figura 21. *Diagramación del ejemplo de gradiente geométrico (suscripción: A = $50; g = 5 %)*



Fuente: *elaborado a partir del ejemplo.*

Desglose de los pagos de suscripción (al inicio de cada mes):

- ***Ecuación 57.*** **Inicio Mes 1 (Tiempo 0).**
  $F_0 = A\ (1 + g)\ 1{-}1 = \$50\ (1 + 0{,}05)0 = \$50 \times 1 = \$50$

Esta es el primer pago base.

- ***Ecuación 58.*** **Inicio Mes 2 (Tiempo 1).**
  $F_1 = A\ (1 + g)\ 2{-}1 = \$50\ (1 + 0{,}05)1 = \$50 \times 1{,}05 = \$52{,}50$

El pago aumenta un 5 % respecto al mes anterior $(50 \times 0{,}05 = \$2{,}50)$.

- ***Ecuación 59.*** **Inicio Mes 3 (Tiempo 2).**
  $F_2 = A\ (1 + g)3{-}1 = \$50\ (1 + 0{,}05)2 = \$50 \times 1{,}1025 = \$55{,}13$ (redondeado)

El pago aumenta un 5 % respecto al mes anterior (52,50 × 0,05 = $2625).

Los flujos de caja anticipados son: $50 (inicio mes 1), $52,50 (inicio mes 2), $55,13 (inicio mes 3).

Referencias

Agudelo R, D. A. y Fernández G., A. F. (2019). *Matemáticas financieras* (1.a ed.). Pearson Educación.

Aguilera Gómez, V. M. y Díaz Mata, A. (2020). *Matemáticas financieras* (6.a ed.). McGraw Hill Interamericana.

Cárdenas Escobar, A. y Cárdenas Escobar, A. (2024). *Un curso de matemáticas financieras*. https://hdl.handle.net/20.500.12585/12639

Flórez Uribe, J. A. (2015). *Matemáticas financieras empresariales* (3.a ed.). Ecoe Ediciones. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/lc/unad/titulos/126540

Gutiérrez Carmona, J. (2012). *Matemáticas financieras: Con fórmulas, calculadora financiera y Excel*. Ecoe Ediciones. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/lc/unad/titulos/69203

López Sánchez, L. M. y López Sánchez, M. L. (2018). *Matemáticas financieras con aplicación a las normas internacionales de información financiera para Pymes*. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/lc/unad/titulos/131485

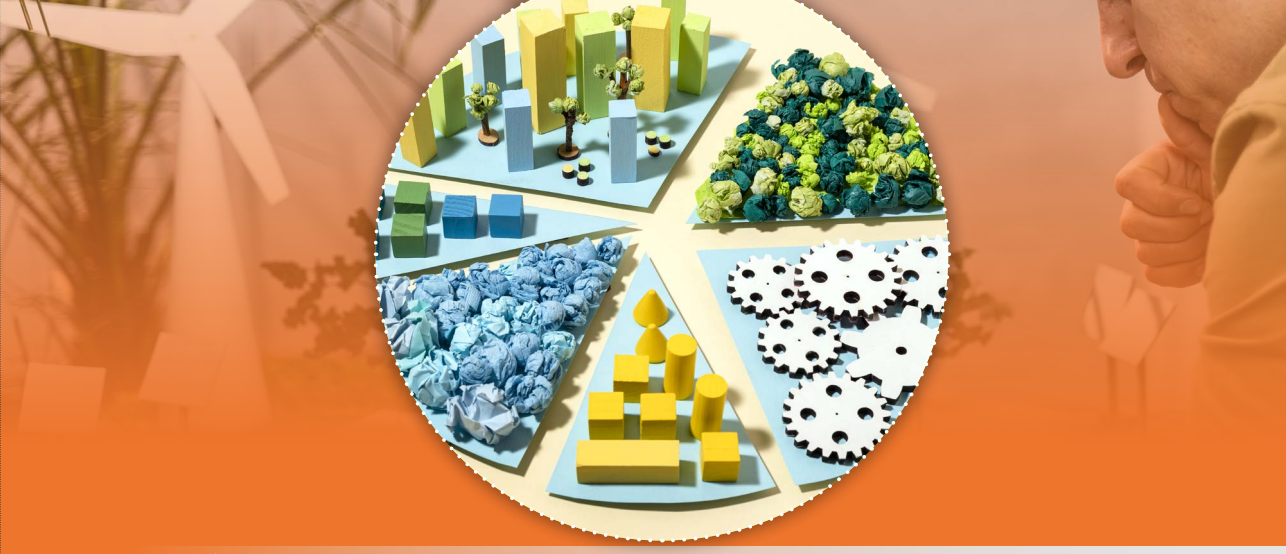
Meza Orozco, J. de J. (2013). *Matemáticas financieras aplicadas: Uso de las calculadoras financieras y EXCEL* (5.a ed.). Ecoe Ediciones. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/114356

Pabón Miranda, P. P. (2023). *Matemáticas financieras con Excel, normas colombianas y NIIF.* Editorial Unimagdalena https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/231069

Rodríguez Franco, J., & Pierdant Rodríguez, A. I. (2015). **Matemáticas financieras con aplicaciones en Excel.** Grupo Editorial Patria.

Sosa Gómez, R. E. (2023). *Manual de ingeniería económica.* Universidad Sergio Arboleda https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/232913

Vidaurri Aguirre, H. M. (2020). Matemáticas financieras. *Cengage Learning.* https://www-ebooks7-24-com.bibliotecavirtual.unad.edu.co/?il=10760



Capítulo 4

Sistemas de amortización y sus aplicaciones financieras

Introducción

La amortización es un proceso financiero esencial que permite la extinción gradual de una deuda mediante pagos periódicos, compuestos por capital e intereses. La correcta elección del sistema de amortización impacta el costo total del crédito, la gestión del flujo de caja y la toma de decisiones en empresas y personas (Gómez y Morales, 2022; ITM, 2023). Este capítulo examina los sistemas de amortización más relevantes, sus fundamentos matemáticos, ejemplos prácticos y su aplicación en el contexto colombiano y latinoamericano.

Conceptos fundamentales de amortización

La **amortización** es el mecanismo mediante el cual el deudor devuelve el capital y los intereses de un financiamiento a través de cuotas periódicas, según lo pactado con el prestamista. Los sistemas de amortización determinan la forma en que estos pagos se estructuran y distribuyen a lo largo del tiempo, pudiendo implicar cuotas fijas, variables o periodos de gracia (Gómez y Morales, 2022; ITM, 2023).

Elementos clave:

- **Capital inicial** (V): monto original del préstamo.
- **Tasa de interés** (i): porcentaje aplicado periódicamente sobre el saldo pendiente.
- **Plazo** (n): número de periodos en los que se pagará la deuda.
- **Cuota**: pago periódico (fijo o variable) que cubre intereses y capital.

Clasificación de los sistemas de amortización

Los sistemas de amortización más utilizados en la literatura académica reciente son (Gómez y Morales, 2022; ITM, 2023):

- Sistema francés (cuota fija)
- Sistema alemán (abono constante a capital)
- Sistema americano (pago único de capital)
- Sistemas con gradiente aritmético o geométrico

- Sistemas con periodo de gracia parcial o periodo muerto
- Amortización en UVR (unidad de valor real)

Sistema francés (cuota fija)

Definición

El sistema francés, también conocido como sistema de cuota fija, es el más empleado en créditos hipotecarios y de consumo. Consiste en pagos periódicos iguales, donde la proporción de intereses disminuye y la amortización de capital aumenta progresivamente (ITM, 2023; Gómez y Morales, 2022).

Fórmula de la cuota fija.

Ecuación 60.

Ejemplo:

$$C = \frac{V \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Préstamo de $10.000.000 COP a 5 años (60 meses) con una tasa de interés mensual del 1 %.

Cuota fija mensual: $222.444 COP.

Tabla 2. *Tabla de amortización por el sistema francés, cuota fija (extracto)*

Mes	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota	Saldo final
1	10.000.000	100.000	122.444	222.444	9.877.556
...	...	...	...	...	...
60	220.242	2.202	220.242	222.444	0

Total intereses pagados: $3.346.669 COP

Total pagado: $13.346.669 COP

Aplicaciones

- Créditos hipotecarios y de consumo (ITM, 2023; Gómez y Morales, 2022).

Ventajas: cuotas predecibles, fácil planificación financiera.

Desventajas: mayor costo total en intereses comparado con otros sistemas.

Sistema alemán (abono constante a capital)

Definición

En el sistema alemán, el abono al capital es constante en cada periodo, mientras que los intereses disminuyen conforme se reduce el saldo pendiente. Por ello, las cuotas totales son decrecientes (ITM, 2023; Gómez y Morales, 2022).

Fórmulas

Ecuación 61.

- Amortización periódica:

$$A = \frac{V}{n}$$

Ecuación 62.

- Interés del periodo:

$$I_t = (V - A(t-1)) \cdot i$$

Ejemplo:

Préstamo de $10.000.000 COP a 5 años (60 meses), con tasa del 1 % mensual.

Abono mensual a capital: $166.667 COP.

Tabla 3. *Tabla de amortización por el sistema alemán, abono constante a capital (extracto)*

Mes	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota total	Saldo final
1	10.000.000	100.000	166.667	266.667	9.833.333
...	...	...	...	...	...
60	166.667	1.667	166.667	168.333	0

Total intereses pagados: $3.050.000 COP

Total pagado: $13.050.000 COP

Aplicaciones

- Microcréditos y préstamos empresariales (ITM, 2023; Gómez y Morales, 2022).

Ventajas: menor costo total de intereses, amortización acelerada.

Desventajas: cuotas iniciales más altas.

Sistemas con periodo de gracia parcial y periodo muerto

Periodo de gracia parcial

Definición

El periodo de gracia parcial es un intervalo inicial del préstamo durante el cual el deudor solo paga los intereses generados, sin amortizar capital. El saldo de la deuda permanece constante durante este periodo (Gómez y Morales, 2022; Valencia y Martínez, 2021).

Características clave:

- Pagos durante la gracia: solo intereses.
- Efecto en el capital: el saldo no se reduce.
- Costo financiero: los intereses no se capitalizan, ya que se pagan periódicamente.

Ejemplo:

Préstamo de $100.000.000 COP a 6 años (72 meses), tasa del 1 % mensual, gracia parcial de 12 meses.

Tabla 4. *Tabla de amortización con periodo de gracia parcial*

Mes	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota	Saldo final
1	100.000.000	1.000.000	0	1.000.000	100.000.000
...	...	...	...	...	...
13	100.000.000	1.000.000	1.224.444	2.224.444	98.775.556
...	...	...	...	...	...

Mes	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota	Saldo final
72	2.224.444	22.244	2.202.200	2.224.444	0

Aplicaciones:

Créditos corporativos para modernización de infraestructura (Valencia y Martínez, 2021).

Periodo muerto (gracia total)

Definición

El periodo muerto es un intervalo inicial donde no se pagan ni intereses ni capital. Los intereses generados se capitalizan, aumentando el saldo de la deuda. También se denomina "gracia total" (ITM, 2023; Valencia y Martínez, 2021).

Características clave:

- Pagos durante la gracia: ninguno.
- Efecto en el capital: el saldo aumenta por capitalización de intereses.
- Costo financiero: mayor que el periodo de gracia parcial debido a la capitalización.

Ejemplo:

Préstamo de $100.000.000 COP a 6 años (72 meses), tasa del 1 % mensual, periodo muerto de 12 meses.

Tabla 5. *Tabla de amortización con periodo muerto*

Mes	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota	Saldo final
1	100.000.000	1.000.000	0	0	101.000.000
...	...	...	...	...	...

Mes	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota	Saldo final
12	111.682.503	1.116.825	0	0	112.682.503
13	112.682.503	1.126.825	1.379.735	2.506.560	111.302.768
...	...	...	...	...	...
72	2.481.743	24.817	2.481.743	2.506.560	0

Aplicaciones:

- Créditos de fomento para proyectos industriales de maduración tardía (Valencia y Martínez, 2021).

Con cuota fija y tasa variable

De acuerdo con lo que hemos visto, con relación al análisis de créditos e inversiones, es necesario utilizar tablas de amortización que permitan controlar de forma detallada las cuotas, el saldo pendiente y el interés a pagar.

En este caso, se realizará un caso práctico de tablas de amortización con cuota fija y tasa variable.

La cuota fija se refiere a un valor constante que el deudor paga periódicamente durante la vigencia del crédito. Este valor incluye el abono a capital y el pago de intereses, que varían en proporción, aunque el total de la cuota se mantiene inalterado.

El sistema de amortización con cuota fija y tasa variable es un método de pago de préstamos donde el monto de la cuota, que puede ser mensual, trimestral, o cualquiera que se haya determinado, se mantiene constante a lo largo del tiempo. Sin embargo, la tasa de interés varía según las condiciones del mercado. Como resultado, la composición de la cuota cambia en cada periodo: cuando la tasa sube, se paga más interés y menos capital; cuando baja, ocurre lo contrario.

Un ejemplo de aplicación es un crédito hipotecario con condiciones. El sistema de amortización con cuota fija y tasa variable es un método de pago de préstamos donde el monto de la cuota (mensual, trimestral, etc.) se mantiene constante a lo largo

del tiempo, pero la tasa de interés varía según las condiciones del mercado. Como resultado, la composición de la cuota cambia en cada periodo: cuando la tasa sube, se paga más interés y menos capital; cuando baja, ocurre lo contrario.

Este sistema es utilizado comúnmente en créditos hipotecarios con condiciones variables.

Fórmula general

Ecuación 63.

Para mantener la cuota fija cuando existen tasas variables, se recalcula la composición de capital e interés de la siguiente manera:

- *Cuota fija (C):* determinada al inicio, puede estar basada en la tasa promedio esperada o recalculada cada cierto número de periodos.
- **En cada periodo:**
  - ◇ Interés = Saldo pendiente × Tasa del periodo
  - ◇ Amortización = Cuota fija – Interés
  - ◇ Nuevo saldo = Saldo anterior – Amortización

Ejercicio

ejemplo:

Una empresa adquiere un préstamo de $100.000.000 para pagar en 3 años (36 meses) mediante un sistema de amortización con cuota fija mensual de $3.500.000. La tasa de interés es variable mensualmente según el siguiente esquema:

- Meses 1-12: 1,2 % mensual

- Meses 13-24: 1,4 % mensual
- Meses 25-36: 1,1 % mensual

Se solicita:

1. Calcular el valor del interés, amortización y saldo restante para los primeros 2 meses.
2. Explicar cómo afectaría el cambio de tasa al saldo en el mes 13.

Desarrollo:

Mes 1:

- Saldo inicial: $\$100.000.000$
- Interés = $100.000.000 \times 0{,}012 = \$1.200.000$
- Amortización = $3.500.000 - 1.200.000 = \$2.300.000$
- Nuevo saldo $100.000.000 - 2.300.000 = 97.700.000$

Mes 2:

- Saldo inicial: $\$97.700.000$
- Interés = $97.700.000 \times 0{,}012 = \$1.172.400$
- Amortización = $3.500.000 - 1.172.400 = \$2.327.600$
- Nuevo saldo = $97.700.000 - 2.327.600 = \$95.372.400$

Pregunta de análisis:

¿Qué ocurrirá en el mes 13 cuando la tasa suba a 1,4 %? ¿Cómo se verá afectada la amortización?

Mes 13:

- Saldo inicial: $70.503.530
- Interés = $70.503.530 × 0,014 = $987.049
- Amortización = 3.500.000 – 987.049 = $2.512.951
- Nuevo saldo = $70.503.530 – $2.512.951= $67.990.580

Como se puede observar, al subir la tasa de interés la amortización disminuye; por lo tanto, el saldo final se afecta de manera negativa.

Solución en Excel

Meses 1-12:	1,20 %	mensual
Meses 13-24:	1,40 %	mensual
Meses 25-36:	1,10 %	mensual

Tabla 6. *Tabla de amortización con tasa de interés variable*

Mes	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota fija	Saldo final
1	$ 100.000.000	$ 1.200.000	$ 2.300.000	$ 3.500.000	$ 97.700.000
2	$ 97.700.000	$ 1.172.400	$ 2.327.600	$ 3.500.000	$ 95.372.400
3	$ 95.372.400	$ 1.144.469	$ 2.355.531	$ 3.500.000	$ 93.016.869
4	$ 93.016.869	$ 1.116.202	$ 2.383.798	$ 3.500.000	$ 90.633.071
5	$ 90.633.071	$ 1.087.597	$ 2.412.403	$ 3.500.000	$ 88.220.668
6	$ 88.220.668	$ 1.058.648	$ 2.441.352	$ 3.500.000	$ 85.779.316
7	$ 85.779.316	$ 1.029.352	$ 2.470.648	$ 3.500.000	$ 83.308.668

Mes	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota fija	Saldo final
8	$ 83.308.668	$ 999.704	$ 2.500.296	$ 3.500.000	$ 80.808.372
9	$ 80.808.372	$ 969.700	$ 2.530.300	$ 3.500.000	$ 78.278.072
10	$ 78.278.072	$ 939.337	$ 2.560.663	$ 3.500.000	$ 75.717.409
11	$ 75.717.409	$ 908.609	$ 2.591.391	$ 3.500.000	$ 73.126.018
12	$ 73.126.018	$ 877.512	$ 2.622.488	$ 3.500.000	$ 70.503.530
13	$ 70.503.530	$ 987.049	$ 2.512.951	$ 3.500.000	$ 67.990.580
14	$ 67.990.580	$ 951.868	$ 2.548.132	$ 3.500.000	$ 65.442.448
15	$ 65.442.448	$ 916.194	$ 2.583.806	$ 3.500.000	$ 62.858.642
16	$ 62.858.642	$ 880.021	$ 2.619.979	$ 3.500.000	$ 60.238.663
17	$ 60.238.663	$ 843.341	$ 2.656.659	$ 3.500.000	$ 57.582.004
18	$ 57.582.004	$ 806.148	$ 2.693.852	$ 3.500.000	$ 54.888.153
19	$ 54.888.153	$ 768.434	$ 2.731.566	$ 3.500.000	$ 52.156.587
20	$ 52.156.587	$ 730.192	$ 2.769.808	$ 3.500.000	$ 49.386.779
21	$ 49.386.779	$ 691.415	$ 2.808.585	$ 3.500.000	$ 46.578.194
22	$ 46.578.194	$ 652.095	$ 2.847.905	$ 3.500.000	$ 43.730.288
23	$ 43.730.288	$ 612.224	$ 2.887.776	$ 3.500.000	$ 40.842.513
24	$ 40.842.513	$ 571.795	$ 2.928.205	$ 3.500.000	$ 37.914.308
25	$ 37.914.308	$ 417.057	$ 3.082.943	$ 3.500.000	$ 34.831.365
26	$ 34.831.365	$ 383.145	$ 3.116.855	$ 3.500.000	$ 31.714.510
27	$ 31.714.510	$ 348.860	$ 3.151.140	$ 3.500.000	$ 28.563.370
28	$ 28.563.370	$ 314.197	$ 3.185.803	$ 3.500.000	$ 25.377.567
29	$ 25.377.567	$ 279.153	$ 3.220.847	$ 3.500.000	$ 22.156.720
30	$ 22.156.720	$ 243.724	$ 3.256.276	$ 3.500.000	$ 18.900.444
31	$ 18.900.444	$ 207.905	$ 3.292.095	$ 3.500.000	$ 15.608.349
32	$ 15.608.349	$ 171.692	$ 3.328.308	$ 3.500.000	$ 12.280.041
33	$ 12.280.041	$ 135.080	$ 3.364.920	$ 3.500.000	$ 8.915.121
34	$ 8.915.121	$ 98.066	$ 3.401.934	$ 3.500.000	$ 5.513.187
35	$ 5.513.187	$ 60.645	$ 3.439.355	$ 3.500.000	$ 2.073.832

Mes	Saldo inicial	Interés	Amortización	Cuota fija	Saldo final
36	$ 2.073.832	$ 22.812	$ 2.073.832	$ 2.096.644	$ 0

Fuente: *elaboración propia.*

En conclusión, un sistema de amortización con cuota fija y tasa variable tiene como ventajas la estabilidad de pagos del deudor y que, si la tasa baja, una parte mayor de la cuota se destina para abonar al capital.

En cuanto a las desventajas hay mayor incertidumbre en el costo total del crédito y existe una posibilidad alta de mayor plazo del crédito si las tasas suben.

Con cuota variable y gradientes aritméticos

El sistema de amortización con cuota variable y gradiente aritmético se basa en una serie de pagos crecientes o decrecientes a lo largo del tiempo, donde cada cuota aumenta (o disminuye) en una cantidad constante llamada gradiente (G). Este sistema se puede usar en momentos donde se esperaría que los ingresos del deudor aumenten o cuando se quiere aliviar la carga financiera en los primeros años.

En este sentido, un gradiente aritmético es una secuencia de flujos de efectivo en la cual cada término sucesivo se incrementa o disminuye en una cantidad constante con respecto al anterior. A diferencia del gradiente geométrico, donde los cambios son proporcionales, en el gradiente aritmético los cambios son lineales.

Este sistema es común en financiamientos empresariales o préstamos de largo plazo, donde se busca una mayor flexibilidad al inicio del crédito.

Fórmula general

Las cuotas en este sistema se calculan como:

Ecuación 64.

$$Cn = C1 + (n-1)\,x\,G$$

donde:

- Cn = cuota en el periodo n
- C_1 = primera cuota
- G = gradiente aritmético (incremento o decremento constante por periodo)
- n = número de periodo

En cada periodo se calcula:

Ecuación 65.

Interés = saldo anterior × tasa

Ecuación 66.

Amortización = cuota – interés

Nuevo saldo = saldo anterior – amortización

Ejercicio ejemplo:

Una empresa solicita un préstamo de $50.000.000 para pagar en 2 años (24 meses). Se acuerda un sistema de amortización con cuotas mensuales variables con un gradiente aritmético creciente de $100.000 y una tasa de interés fija del 1 % mensual. La primera cuota es de $1.250.000.

Se solicita:

Calcular el valor del interés, amortización y saldo restante para los primeros 3 meses.

Mes 1:

- Cuota: $1.250.000
- Interés: 50.000.000 × 0,01 = $500.000
- Amortización: $1.250.000 – $500.000 = $750.000
- Saldo final: $50.000.000 – $750.000 = $49.250.000

Mes 2:

- Cuota: $1.350.000
- Interés: 49.250.000 × 0,01 = $492.500
- Amortización: $1.350.000 – $492.500 = $857.500
- Saldo final: $49.250.000 – $857.500 = $48.392.500

Mes 3:

- Cuota: $1.450.000
- Interés: 48.392.500 × 0,01 = $483.925
- Amortización: $1.450.000 – $483.925 = $966.075
- Saldo final: $48.392.500 – $966.075= $47.426.425
- Analizar cómo afecta el gradiente al saldo total a lo largo del tiempo. Desarrollo paso a paso (primeros 3 meses).

  En las primeras cuotas, la mayor parte se destina al pago de intereses. Gracias al gradiente creciente, cada mes se amortiza más capital, lo que acelera el pago de la deuda con el tiempo. Este esquema es útil para personas o empresas que proyectan aumento de ingresos o liquidez en el futuro.

Solución en Excel:

Préstamo	$50.000.000
Periodo	24 meses
Gradiente aritmético	$100.000
Interés	1%
Primera cuota	$1.250.000

Tabla 7. *Tabla de amortización con cuota creciente (gradiente aritmético)*

Mes	Saldo inicial	Cuota	Interés	Amortización	Saldo final
0					$ 50.000.000
1	$ 50.000.000	$ 1.250.000	$ 500.000	$ 750.000	$ 49.250.000
2	$ 49.250.000	$ 1.350.000	$ 492.500	$ 857.500	$ 48.392.500
3	$ 48.392.500	$ 1.450.000	$ 483.925	$ 966.075	$ 47.426.425
4	$ 47.426.425	$ 1.550.000	$ 474.264	$ 1.075.736	$ 46.350.689
5	$ 46.350.689	$ 1.650.000	$ 463.507	$ 1.186.493	$ 45.164.196
6	$ 45.164.196	$ 1.750.000	$ 451.642	$ 1.298.358	$ 43.865.838
7	$ 43.865.838	$ 1.850.000	$ 438.658	$ 1.411.342	$ 42.454.496
8	$ 42.454.496	$ 1.950.000	$ 424.545	$ 1.525.455	$ 40.929.041
9	$ 40.929.041	$ 2.050.000	$ 409.290	$ 1.640.710	$ 39.288.332
10	$ 39.288.332	$ 2.150.000	$ 392.883	$ 1.757.117	$ 37.531.215
11	$ 37.531.215	$ 2.250.000	$ 375.312	$ 1.874.688	$ 35.656.527
12	$ 35.656.527	$ 2.350.000	$ 356.565	$ 1.993.435	$ 33.663.093
13	$ 33.663.093	$ 2.450.000	$ 336.631	$ 2.113.369	$ 31.549.724
14	$ 31.549.724	$ 2.550.000	$ 315.497	$ 2.234.503	$ 29.315.221
15	$ 29.315.221	$ 2.650.000	$ 293.152	$ 2.356.848	$ 26.958.373
16	$ 26.958.373	$ 2.750.000	$ 269.584	$ 2.480.416	$ 24.477.957
17	$ 24.477.957	$ 2.850.000	$ 244.780	$ 2.605.220	$ 21.872.736
18	$ 21.872.736	$ 2.950.000	$ 218.727	$ 2.731.273	$ 19.141.464

19	$ 19.141.464	$ 3.050.000	$ 191.415	$ 2.858.585	$ 16.282.878
20	$ 16.282.878	$ 3.150.000	$ 162.829	$ 2.987.171	$ 13.295.707
21	$ 13.295.707	$ 3.250.000	$ 132.957	$ 3.117.043	$ 10.178.664
22	$ 10.178.664	$ 3.350.000	$ 101.787	$ 3.248.213	$ 6.930.451
23	$ 6.930.451	$ 3.450.000	$ 69.305	$ 3.380.695	$ 3.549.755
24	$ 3.549.755	$ 3.550.000	$ 35.498	$ 3.549.755	-$ 0

Fuente: *elaboración propia.*

En conclusión, un sistema de amortización con cuota variable y gradiente geométrico permite adaptar las cuotas a las posibilidades económicas del deudor, además de que es ideal para personas que esperan aumentos constantes en sus ingresos.

Sin embargo, las cuotas futuras pueden elevarse, ya que, si el gradiente geométrico es alto, las últimas cuotas pueden volverse muy onerosas e inasumibles si los ingresos no crecen al mismo ritmo.

Con cuota variable y gradientes geométricos

Además de una definición explícita de “cuota variable”, es aquella que varía en cada periodo su valor en términos relativos o absolutos. A continuación, se presentan ejemplos prácticos que ilustran su aplicación. Por ejemplo, se describe un caso en el que un artículo se adquiere a crédito mediante cuotas mensuales iguales variables durante cinco años. La primera cuota es de $2.500 y aumenta en un 2 % cada mes hasta finales del tercer año. A partir de ese momento, las cuotas se estabilizan. Este tipo de esquema de pago refleja una serie de cuotas que crecen en progresión geométrica, es decir, cada cuota es un porcentaje mayor que la anterior.

Un sistema de cuotas variables con gradiente geométrico es un método de amortización en el que las cuotas de pago aumentan o pueden disminuir en proporción constante. En lugar de aumentar por una cantidad fija como en el gradiente aritmético, aquí cada cuota se multiplica por un mismo factor de crecimiento.

En este mismo sentido, un gradiente geométrico tiene una secuencia de pagos en la que cada término continuo se incrementa o disminuye en una proporción constante con respecto al anterior. Es decir, los flujos de efectivo crecen o no de una forma multiplicativa por un factor constante en cada periodo. Esta simetría continua se conoce como tasa de crecimiento geométrica.

En este caso, la primera cuota se define como punto de partida.

Fórmula general

Ecuación 67.

Razón geométrica®: es el factor por el cual se multiplica la cuota anterior para obtener la siguiente.

Las cuotas en este sistema se calculan como:

$$Cn = C1\ x\ r^{(n-1)}$$

donde:

- Cn = cuota en el periodo n
- C_1 = primera cuota
- r = razón del gradiente geométrico (por ejemplo, 1,05 indica un 5 % de incremento mensual)
- n = número del periodo

Ejemplo:

Supongamos un préstamo de $20.000.000:

- Primera cuota: $300.000

- Razón geométrica: 1,05 (es decir, cada mes aumenta 5 %)
- Tasa de interés mensual: 1,2 %
- Plazo: 36 meses

Solución en Excel:

Monto del préstamo (P):	$20.000.000
Tasa de interés mensual (i):	1,20 %
Primera cuota (C_1):	$300.000
Gradiente (G):	5 % por mes
Número de cuotas:	36

Tabla 8. *Tabla de amortización con gradientes*

Mes	Saldo inicial	Cuota	Interés	Amortización	Saldo final
1	$ 20.000.000	$ 300.000	$ 240.000	$ 60.000	$ 19.940.000
2	$ 19.940.000	$ 313.500	$ 239.280	$ 74.220	$ 19.865.780
3	$ 19.865.780	$ 327.608	$ 238.389	$ 89.218	$ 19.776.562
4	$ 19.776.562	$ 342.350	$ 237.319	$ 105.031	$ 19.671.531
5	$ 19.671.531	$ 357.756	$ 236.058	$ 121.697	$ 19.549.834
6	$ 19.549.834	$ 373.855	$ 234.598	$ 139.257	$ 19.410.577
7	$ 19.410.577	$ 390.678	$ 232.927	$ 157.751	$ 19.252.826
8	$ 19.252.826	$ 408.259	$ 231.034	$ 177.225	$ 19.075.601
9	$ 19.075.601	$ 426.630	$ 228.907	$ 197.723	$ 18.877.878
10	$ 18.877.878	$ 445.829	$ 226.535	$ 219.294	$ 18.658.584
11	$ 18.658.584	$ 465.891	$ 223.903	$ 241.988	$ 18.416.596
12	$ 18.416.596	$ 486.856	$ 220.999	$ 265.857	$ 18.150.740
13	$ 18.150.740	$ 508.764	$ 217.809	$ 290.956	$ 17.859.784
14	$ 17.859.784	$ 531.659	$ 214.317	$ 317.341	$ 17.542.443

Mes	Saldo inicial	Cuota	Interés	Amortización	Saldo final
15	$ 17.542.443	$ 555.583	$ 210.509	$ 345.074	$ 17.197.369
16	$ 17.197.369	$ 580.585	$ 206.368	$ 374.216	$ 16.823.152
17	$ 16.823.152	$ 606.711	$ 201.878	$ 404.833	$ 16.418.319
18	$ 16.418.319	$ 634.013	$ 197.020	$ 436.993	$ 15.981.326
19	$ 15.981.326	$ 662.544	$ 191.776	$ 470.768	$ 15.510.558
20	$ 15.510.558	$ 692.358	$ 186.127	$ 506.231	$ 15.004.327
21	$ 15.004.327	$ 723.514	$ 180.052	$ 543.462	$ 14.460.864
22	$ 14.460.864	$ 756.072	$ 173.530	$ 582.542	$ 13.878.322
23	$ 13.878.322	$ 790.096	$ 166.540	$ 623.556	$ 13.254.767
24	$ 13.254.767	$ 825.650	$ 159.057	$ 666.593	$ 12.588.174
25	$ 12.588.174	$ 862.804	$ 151.058	$ 711.746	$ 11.876.428
26	$ 11.876.428	$ 901.630	$ 142.517	$ 759.113	$ 11.117.315
27	$ 11.117.315	$ 942.204	$ 133.408	$ 808.796	$ 10.308.519
28	$ 10.308.519	$ 984.603	$ 123.702	$ 860.901	$ 9.447.618
29	$ 9.447.618	$ 1.028.910	$ 113.371	$ 915.539	$ 8.532.080
30	$ 8.532.080	$ 1.075.211	$ 102.385	$ 972.826	$ 7.559.254
31	$ 7.559.254	$ 1.123.595	$ 90.711	$ 1.032.884	$ 6.526.369
32	$ 6.526.369	$ 1.174.157	$ 78.316	$ 1.095.841	$ 5.430.528
33	$ 5.430.528	$ 1.226.994	$ 65.166	$ 1.161.828	$ 4.268.700
34	$ 4.268.700	$ 1.282.209	$ 51.224	$ 1.230.985	$ 3.037.716
35	$ 3.037.716	$ 1.339.908	$ 36.453	$ 1.303.456	$ 1.734.260
36	$ 1.734.260	$ 1.400.204	$ 20.811	$ 1.734.260	-$ 0

Fuente: *elaboración propia.*

En conclusión, la amortización cuota variable con gradiente geométrico tiene una baja carga inicial, debido a que las primeras cuotas son más bajas, lo que permite al prestatario enfrentar el pago con mayor comodidad al inicio del préstamo. Es útil para personas o empresas que esperan un incremento progresivo de sus ingresos (por ejemplo, una empresa emergente o un profesional joven).

Sistema de amortización con unidad de valor real (UVR)

El sistema de amortización con unidad de valor real (UVR) es un tipo de crédito que se ajusta según la inflación, ya que las cuotas y el saldo del préstamo se expresan en UVR, una unidad que varía diariamente según el índice de precios al consumidor (IPC). Es común en Colombia para créditos de vivienda.

El sistema de amortización en UVR es una modalidad de crédito en países como Colombia en donde el saldo del capital y los pagos periódicos se ajustan con base en la variación del índice de precios al consumidor, lo que permite preservar el valor real del crédito.

En este mismo sentido, la UVR es una unidad que muestra el poder adquisitivo continuo del dinero. Fue creada para que los pagos de los créditos hipotecarios concuerden al comportamiento de la inflación, y de esta manera mantener constante el valor real del dinero en el tiempo, (Banco de la República de Colombia (s.f.)

Definición de la UVR

- La UVR es una unidad de medida que fue creada por el Banco de la República para reflejar el poder adquisitivo constante del dinero.
- Se actualiza diariamente con base en la inflación.
- Su valor en pesos cambia, pero el valor en UVR del préstamo permanece fijo.

En este caso, el saldo del préstamo y las cuotas están denominados en UVR, no en pesos. Cada mes, se multiplica la cantidad de UVR por el valor en pesos vigente de la UVR para calcular cuánto pagar. La tasa de interés también puede estar expresada como un porcentaje adicional sobre la UVR.

Ejercicio ejemplo:

Supongamos se solicita un crédito en UVR con las siguientes características:

- Monto solicitado: 5.000 UVR
- Tasa: 6 % anual sobre UVR
- Plazo: 12 meses
- Valor actual de la UVR: $360

Paso 1. Convertir a pesos

- Monto en pesos: 5.000 × $360 = $1.800.000

Paso 2. Calcular interés mensual sobre UVR

- Tasa mensual: 6 % / 12 = 0,5 %

Desarrollo de la tabla de amortización:

Monto solicitado:	$ 5.000 UVR
Tasa anual sobre UVR	6 %
Tasa mensual:	0,5 %
Plazo:	12 meses
Valor actual de la UVR:	$ 360

Tabla 9. *Tabla de amortización en UVR*

Mes	Saldo inicial (UVR)	Cuota (UVR)	Interés (UVR)	Amortización (UVR)	Saldo final (UVR)	Valor UVR ($)	Cuota en pesos ($)
1	$ 5.000	$ 430,33	25,00	$ 405	$ 4.595	360	$ 154.919,57
2	$ 4.595	$ 430,33	22,97	$ 407	$ 4.187	362	$ 155.694,17
3	$ 4.187	$ 430,33	20,94	$ 409	$ 3.778	364	$ 156.472,64
4	$ 3.778	$ 430,33	18,89	$ 411	$ 3.366	365	$ 157.255,01
5	$ 3.366	$ 430,33	16,83	$ 413	$ 2.953	367	$ 158.041,28
6	$ 2.953	$ 430,33	14,76	$ 416	$ 2.537	369	$ 158.831,49
7	$ 2.537	$ 430,33	12,69	$ 418	$ 2.120	371	$ 159.625,64
8	$ 2.120	$ 430,33	10,60	$ 420	$ 1.700	373	$ 160.423,77
9	$ 1.700	$ 430,33	8,50	$ 422	$ 1.278	375	$ 161.225,89
10	$ 1.278	$ 430,33	6,39	$ 424	$ 854	377	$ 162.032,02
11	$ 854	$ 430,33	4,27	$ 426	$ 428	378	$ 162.842,18
12	$ 428	$ 430,33	2,14	$ 428	0	380	$ 163.656,39

Fuente: *elaboración propia.*

Con este tipo de amortización, el banco se protege frente a la inflación. Permite mayor acceso a créditos hipotecarios. Sin embargo, las cuotas en pesos pueden aumentar con la inflación, generando mayor incertidumbre para el deudor.

Referencias

Agudelo R., D. A., Pachón, M., Quintanilla, H. y Fernández G., A. F. (2019). Matemáticas financieras: conceptos y aplicaciones. Pearson Educación. https://www-ebooks7-24-com.bibliotecavirtual.unad.edu.co/?il=7897Banco de la República de Colombia. (s.f.). *Unidad de Valor Real – UVR*. https://www.banrep.gov.co

Gómez, M. A. y Morales, D. (2022). *Matemáticas financieras: teoría y práctica*. Editorial Ecoe.

Instituto Tecnológico Metropolitano [ITM]. (2023). *Matemáticas financieras.* Editorial ITM. https://catalogo.itm.edu.co/gpd-matematicas-financieras-9789585122826-653ab73dad6d5.html



Capítulo 5

Evaluación de alternativas de Inversión

Introducción

El presente capítulo tiene como propósito desarrollar la evaluación de alternativas de inversión, abordando los indicadores financieros, el análisis de sensibilidad y culminando con un caso práctico en el que se selecciona un proyecto de inversión. Como afirma Morelos (2012), la evaluación de alternativas de inversión es un proceso esencial en la toma de decisiones financieras, especialmente en un entorno empresarial donde los recursos son limitados y la incertidumbre del mercado puede influir en la viabilidad de los proyectos. Por esta razón, la correcta selección de inversiones resulta fundamental para maximizar la rentabilidad y minimizar los riesgos asociados a las decisiones de asignación de capital.

En este contexto, a lo largo del capítulo se examinarán los métodos más relevantes para la evaluación de proyectos, con un énfasis particular en los criterios financieros. Estos métodos permiten a los tomadores de decisiones identificar las alternativas que generan mayor valor y que mejor se alinean con los objetivos estratégicos de una organización.

A continuación, se presentan los objetivos del capítulo:

- Comprender los principios fundamentales de la evaluación de alternativas de inversión y su relevancia en la gestión financiera empresarial.
- Explorar los principales métodos financieros para la selección de proyectos de inversión y sus aplicaciones prácticas en el proceso de toma de decisiones.
- Desarrollar habilidades para interpretar y comparar proyectos bajo diferentes enfoques y escenarios, con el fin de elegir la mejor alternativa de inversión.
- En coherencia con lo planteado, el desarrollo del capítulo sigue esta estructura para cumplir con los objetivos propuestos.

Indicadores financieros

Los indicadores financieros son herramientas fundamentales en el ámbito de las matemáticas financieras. Conforme a lo expresado por Carrión et al. (2019), estos indicadores permiten evaluar la salud económica de una empresa mediante el análisis de ratios como la rentabilidad, el nivel de endeudamiento, la liquidez y la eficiencia operativa. Esta información resulta clave para tomar decisiones informadas sobre el desempeño y la estabilidad financiera de la organización.

Indicadores de rentabilidad

Dentro de los indicadores de rentabilidad, se encuentran lo mencionados a continuación:

Valor presente neto (VPN)

El VPN es una técnica financiera que permite determinar si un proyecto genera o no valor, considerando el valor del dinero en el tiempo. Según Carrión et al. (2019), este tipo de indicador es clave para evaluar la viabilidad financiera y el riesgo de insolvencia de las empresas.

Fórmula

Ecuación 68.

$$VPN = \sum \left(FC / \left(1 + r\right)^{n}\right)$$

donde:

- FC es el flujo de caja neto en el periodo n
- r es la tasa de descuento
- n es el número de periodos

Tasa interna de retorno (TIR)

La TIR representa la tasa de descuento que iguala el valor presente de los ingresos con el de los egresos y determina, tal como lo indica Alfaro (2021), la tasa de crecimiento

del capital por periodo. Así mismo, señala que este indicador es fundamental para comparar la rentabilidad de proyectos en diferentes sectores económicos.

Fórmula

Ecuación 69.

$$TIR = (Flujo\ de\ efectivo\ Neto\ /\ Inversión\ inicial)\ (1/n) - 1$$

donde:

- FEN o FCN es el flujo de efectivo o de caja neto en el periodo n
- CI es el costo de inversión inicial
- n es el número de periodos

Valor anual uniforme equivalente (VAUE)

También llamado costo anual equivalente (CAE), en palabras de Carrillo (2017), consiste en convertir los ingresos y egresos asociados al proyecto en cantidades anuales iguales equivalentes, cuando se aplica al análisis de costos, el VAUE convierte un flujo de caja con valor presente neto en una serie uniforme de pagos o ingresos anuales equivalentes, facilitando la comparación entre proyectos de distinta duración o inversión.

Meza Orozco, J. de J. (2017a). destaca que este método es altamente recomendable para tomar decisiones de remplazo de activos, ya que permite establecer un flujo constante equivalente a lo largo de la vida útil del proyecto.

Fórmula

Ecuación 70.

$$VAUE = VPN(i(1+i)^n / (1+i)^n - 1$$

donde:

- VPN es el valor presente neto del proyecto
- i es la tasa de interés
- n es el número de periodos

Índice de rentabilidad (IR)

El índice de rentabilidad (IR), también conocido como índice beneficio-costo, es un indicador financiero que permite evaluar la conveniencia económica de un proyecto de inversión. Este índice, mide la relación entre el valor presente de los flujos de caja esperados y la inversión inicial del proyecto. De acuerdo con Andrade (2017), un valor de IR mayor a 1 indica que el proyecto genera beneficios netos; igual a 1 señala que los beneficios cubren justo la inversión, y menor a 1 sugiere que no es rentable.

Fórmula

Ecuación 71.

$$IR = \sum((FC / (1+i)^{n}) / INV)$$

donde:

- FC es el flujo de caja neto en el periodo n
- i es la tasa de interés
- n es el número de periodo
- INV es la inversión Inicial

Indicadores de liquidez

Periodo de recuperación de la inversión PRI)

El PRI, según expresa Andrade (2017), mide el tiempo necesario para que los flujos de caja netos cubran y recuperen la inversión inicial. Así mismo, destaca su uso como herramienta de análisis de liquidez, especialmente en contextos donde la recuperación rápida del capital es prioritaria.

Fórmula:

Ecuación 72.

$$PRI = a\,\frac{(b-c)}{d}$$

donde:

- a es el año inmediatamente anterior en que se recupera la inversión
- b es la inversión inicial
- c es el flujo de caja acumulado el año inmediatamente anterior
- d es el flujo de caja del año en el que se recupera la inversión

Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad se define como una técnica que evalúa cómo los cambios en una variable específica afectan el valor presente neto (VPN) o la tasa interna de retorno (TIR) de un proyecto, manteniendo constantes todas las demás variables. Esta técnica es fundamental para identificar las variables más críticas que pueden influir en el rendimiento de una inversión, lo que permite a los inversores tomar decisiones más informadas y mitigar riesgos potenciales.

En este orden, Lledó (2023) destaca que el análisis de sensibilidad mejora la calidad de la información disponible para los inversores, ayudando a comprender cómo las fluctuaciones en las variables estimadas pueden impactar la rentabilidad de un proyecto. Este análisis es esencial para evitar decisiones basadas únicamente en cálculos del valor actual neto (VAN), sin considerar la incertidumbre inherente a las estimaciones.

Además, autores como Gitman y Joehnk (2005), en su obra ***Fundamentos de inversiones***, discuten de qué manera el análisis de sensibilidad permite a los inversores entender cómo las fluctuaciones en las variables clave afectan el valor de un proyecto, lo cual es crucial para la toma de decisiones informadas.

Por su parte, Pérez (2012) investiga la sensibilidad de indicadores financieros como el valor presente neto (VPN) y la tasa interna de rendimiento (TIR). Su enfoque se centra en cómo los cambios en las variables impactan la rentabilidad de las inversiones, especialmente en pequeñas y medianas empresas (mipymes).

Estos autores y sus investigaciones proporcionan una base sólida para comprender cómo el análisis de sensibilidad se utiliza como una herramienta crítica en la evaluación de inversiones, permitiendo a los inversores tomar decisiones más informadas frente a la incertidumbre.

Ahora bien, después de destacar la importancia del análisis de sensibilidad, es necesario mencionar que existen dos variantes, las cuales se definen a continuación:

Análisis de sensibilidad por variable o unidimensional

Es una técnica utilizada para evaluar cómo los cambios en una única variable de entrada afectan el resultado de un modelo. Este enfoque es fundamental en la toma de decisiones, ya que permite identificar las variables más críticas que influyen en los resultados. Los pasos son los siguientes:

- **Elaboración de un modelo de pronóstico:** consiste en la preparación de las proyecciones financieras del proyecto. Es fundamental incluir un panel de variables de entrada, donde se integren los valores de aquellas variables que están relacionadas con el estado de resultados y el flujo de caja. De esta

forma, cualquier modificación en una o varias de estas variables se refleja automáticamente en las proyecciones.

- **Indicadores de las variables de riesgo:** de todas las variables que integran los supuestos del proyecto, el evaluador debe seleccionar aquellas que, en su opinión, pueden tener un mayor impacto en la rentabilidad. Este proceso se fundamenta en la experiencia y el criterio del analista. Por ejemplo, si el proyecto es intensivo en mano de obra, una variable clave que se debe considerar es el precio de la mano de obra. Este mismo enfoque se aplica al resto de las variables. Las variables seleccionadas se conocen como variables de riesgo.

- **Ejecución del análisis:** se modifica únicamente una de las variables identificadas como variables de riesgo, y se calcula el indicador de rentabilidad correspondiente (VPN o TIR), manteniendo constantes las demás variables. Por ejemplo, se puede analizar cómo varía el VPN o la TIR del proyecto ante un cambio del 15 % en el precio.

- **Elaboración de una matriz con los resultados:** una vez se analizan los resultados, se elabora una matriz.

Tabla 10. *Análisis se sensibilidad por variables*

Factor	Precio	Cantidad
1,20	160	150
1,10	120	120
0,90	112	113

Fuente: *elaboración propia.*

Los valores dentro de la matriz representan el valor presente neto (VPN) que se obtiene al modificar únicamente la variable analizada, ya sea aumentando o disminuyendo su valor. Por ejemplo, el valor de 160 que se encuentra en la intersección de la fila correspondiente al precio y la columna correspondiente a 1,20 indica que el VPN del proyecto es de 160 cuando el precio se incrementa en un 20 % (es decir, cuando se multiplica por 1,20).

De manera similar, cada celda de la matriz refleja el VPN resultante de diferentes combinaciones de variaciones en las variables analizadas. Es importante notar que cuando el factor es 1,0, esto indica que no hay cambio en la variable; por lo tanto, el VPN en esa fila será el mismo que se obtuvo en el escenario base. Por esta razón, todos los valores en esa fila son iguales, ya que representan la situación original sin modificaciones. Esta explicación busca clarificar cómo se interpretan los valores en la matriz y su relación con las variaciones de las variables analizadas.

- Análisis de resultados: se obtienen las conclusiones del proyecto, por ejemplo, se puede revisar si la variable precio afecta de mayor o menor manera la rentabilidad del proyecto.

En este orden de ideas, presentamos un ejemplo que permita una mayor comprensión y apropiación de lo mencionado. Es válido mencionar que existe una fórmula para calcular el análisis de sensibilidad, la cual se muestra a continuación:

Ecuación 73.

$$Análisis\ de\ sensibilidad = \left(\frac{VPNn - VPNe)}{VPNe} \right) * 100$$

donde $VPNn$ es el valor presente neto nuevo y $VPNe$ es el valor presente neto original.

Suponiendo que se está evaluando un proyecto con un VPN inicial de $500.000 y se quiere analizar cómo varía este valor al cambiar la tasa de interés, se realiza el siguiente procedimiento:

- Tasa de interés original: 5 %
- Nuevo escenario: 6 %
- VPN nuevo: $480.000

Desarrollo:

$$Análisis\ de\ sensibilidad = \left(\frac{480.000 - 500.000)}{500.000}\right) * 100$$

$$Análisis\ de\ sensibilidad = -4\ \%$$

Esto indica que un aumento del 1 % en la tasa de interés reduce el VPN en un 4 %, lo que sugiere que esta variable es crítica para el éxito del proyecto.

De esta manera, se lleva a cabo el análisis de sensibilidad unidimensional, lo que subraya la importancia de realizar estos ejercicios. Este enfoque permite profundizar en el análisis del valor presente neto (VPN) y facilita la toma de decisiones más informadas al identificar cuál de las variables ejerce un mayor impacto en la rentabilidad del proyecto.

Análisis de sensibilidad por escenarios o multidimensional

Esta técnica examina el efecto combinado de múltiples variables cambiantes simultáneamente. Este enfoque es más complejo, pero proporciona una visión más completa del riesgo y la rentabilidad del proyecto.

Para este análisis, es recomendable diseñar tres escenarios: pesimista, base y optimista. El objetivo principal es determinar en qué escenario la rentabilidad del proyecto se vuelve negativa. Si, por el contrario, incluso en el peor de los escenarios, el VPN sigue siendo positivo, entonces se puede concluir que el proyecto presenta un bajo nivel de riesgo.

A continuación, se presenta un ejemplo práctico que permite apropiar la teoría relacionada.

Imaginemos que una empresa está considerando lanzar un nuevo producto. Para ello, se ha desarrollado un modelo financiero que estima la rentabilidad del proyecto basado en las siguientes variables de entrada:

- Precio de venta por unidad (P)
- Costo de producción por unidad (C)
- Volumen de ventas (V)
- Gastos de *marketing* (M)

La rentabilidad del proyecto se puede calcular utilizando la siguiente fórmula:

Ecuación 74.

$$Beneficio\ neto = (P - C) * V - M$$

- Precio de venta (P): entre 10 y 20 unidades monetarias.
- Costo de producción (C): entre 5 y 15 unidades monetarias.
- Volumen de ventas (V): entre 1000 y 5000 unidades.
- Gastos de *marketing* (M): entre 2000 y 8000 unidades monetarias.

Escenarios para evaluar: se desarrollarán tres escenarios para cada variable:

- Escenario optimista: supone los valores más favorables.
- Escenario base: valores esperados o más realistas.
- Escenario pesimista: valores más desfavorables.

Entonces:

Tabla 11. *Análisis de escenarios*

Variable	Escenario optimista	Escenario base	Escenario pesimista
Precio de venta (P)	20	15	10
Costo de producción (C)	5	10	15
Volumen de ventas (V)	5000	3000	1000
Gastos de marketing (M)	2000	5000	8000

Fuente: *elaboración propia.*

Cálculo del beneficio neto

Para cada escenario se calcula el beneficio neto utilizando la fórmula mencionada anteriormente.

1. **Escenario optimista**

   Beneficio neto = (20-5) *5000-2000

   Beneficio neto = 73.000

2. **Escenario base**

   Beneficio neto = (15-10) *3000-5000

   Beneficio neto = 10.000

3. **Escenario pesimista**

   Beneficio neto = (10-15) *1000-8000

   Beneficio neto = -13000

Análisis e interpretación

Se destaca la importancia del análisis de sensibilidad para comprender cómo las fluctuaciones en variables clave (precio, costo, volumen y *marketing*) pueden influir en la rentabilidad. Los resultados sugieren la necesidad de considerar estrategias que maximicen las oportunidades en escenarios optimistas y minimicen los riesgos en escenarios pesimistas.

Con este ejercicio se reafirma lo señalado por Ramírez (2021), quien indica que estas técnicas permiten evaluar cómo los cambios en las condiciones del mercado, los costos y otros factores afectan los resultados financieros de proyectos específicos. Esto incluye el análisis de escenarios optimistas, pesimistas y más probables.

Selección de proyectos: caso práctico

En este apartado, se presentan casos prácticos de proyectos que tienen como objetivo ilustrar y aplicar la teoría a través de ejercicios. El lector encontrará una detallada explicación de las variables involucradas, fórmulas utilizadas y actividades resueltas paso a paso. Esto permitirá una comprensión profunda y un análisis de cada ejercicio, facilitando la aplicación de los conceptos teóricos en situaciones reales.

Además, esta sección está diseñada para que puedan seguir y aplicar los métodos de resolución de manera clara y efectiva, lo cual enriquecerá su experiencia de aprendizaje y les proporcionará herramientas prácticas para enfrentar desafíos similares en el futuro. Estos ejemplos se desarrollan con base en Meza (2017b), quien ofrece una visión detallada sobre la evaluación financiera de proyectos, proporcionando un marco teórico sólido para el análisis práctico.

Caso práctico: evaluación de sensibilidad en la inversión para creación de una empresa manufacturera

A continuación, se presenta la información para una empresa manufacturera, donde se debe determinar cuál de las dos alternativas de inversión es la mejor opción, utilizando dos indicadores clave, como: valor presente neto (VPN) y tasa interna de retorno (TIR). La tasa de descuento utilizada para los cálculos será del 11 %.

Datos: información sobre los flujos de caja proyectados para las dos alternativas durante 5 años:

Tabla 12. *Flujo de caja proyectado*

Año	Inversión inicial	Flujo de caja A	Flujo de caja B
0	-50.000	-50.000	-50.000
1	10.000	10.000	15.000
2	15.000	15.000	20.000
3	20.000	20.000	25.000
4	25.000	25.000	30.000

Fuente: *elaboración propia.*

- La inversión inicial (año 0) es -50.000 para ambas alternativas.
- Los flujos de caja para cada año se proyectan como se indica en las columnas «Flujo de caja A» y «Flujo de caja B».

Instrucciones:

1. Calcular el valor presente neto (*VPN*):
   Se utiliza la fórmula del *VPN* con una tasa de descuento del 11 % para ambas alternativas. Teniendo en cuenta que, el *VPN* es el valor actual de los flujos de caja futuros descontados a la tasa de interés.

Fórmula:

Ecuación 75.

$$VPN = \sum FCt(1+r)$$

donde:

FC es el flujo de caja en el año.

r es la tasa de descuento (en este caso, 11 %).

t es el año correspondiente.

2. Calcular la tasa interna de retorno (TIR)
Se utiliza la función TIR de Excel o cualquier otra herramienta financiera para calcular la TIR de cada alternativa. La TIR es la tasa de descuento que hace que el VPN sea igual a cero.

3. Análisis de resultados
Se comparan los resultados obtenidos de ambas alternativas:

- VPN: la alternativa con el VPN más alto es la opción más rentable, ya que genera un mayor valor presente neto.

TIR: la alternativa con la TIR más alta es más atractiva, ya que proporciona un rendimiento superior en relación con la inversión inicial.

Desarrollo en Excel:

Tabla 13. *Flujo de caja*

Año	Inversión inicial	Flujo de caja A	Flujo de caja B	Flujo de caja neto A	Flujo de caja neto B
0	-50	-50	-50	-50	-50
1	10	10	15	10	15
2	15	15	20	15	20
3	20	20	25	20	25
4	25	25	30	25	30

Fuente: *elaboración propia.*

Interpretación y análisis

Año: representa los años de la inversión (0 a 4).

Inversión inicial: el valor inicial de la inversión. Esta será siempre negativa en el año 0 porque es el gasto que se realiza para iniciar el proyecto.

Flujo de caja A/B: representan los ingresos que se generan cada año para las alternativas A y B. Estos valores son positivos, ya que son entradas de dinero.

Flujo de caja neto A/B: es la columna que muestra los flujos de caja netos para cada alternativa.

Tabla 14. *Flujo de caja con cálculo VPN y TIR*

Año	0	1	2	3	4
Flujo de caja A	-50	10	15	20	25
Flujo de caja B	-50	15	20	25	30
TIR A	13%				
TIR B	25%				
VPN A	$ 2,28				
VPN B	$ 17,79				
Tasa de descuento	11%				

Fuente: *elaboración propia.*

Fórmulas utilizadas

Tabla 15. *Cálculo de VPN. Ecuación 76*

VNA	$VPN=\sum FCt(1+r)$	
FCt	= Flujo de caja en el año	
r	Tasa de descuento	0,11
t	Año	

Fuente: *elaboración propia*

Tabla 16. *Cálculo de TIR.*

Ecuación 77

TIR	$TIR = \sum(CF / (1 + r)^t) - CI = 0$		
FC	= Flujo de caja en el año.		
r	Tasa de descuento		0,11
t	Año		

Fuente: *elaboración propia.*

Tabla 17. *Resultados obtenidos*

VPN de la alternativa $A = 2{,}2754$
VPN de la alternativa $B = 17{,}7877$
TIR de la alternativa $A = 13\ \%$
TIR de la alternativa $B = 25\ \%$

Fuente: *elaboración propia.*

Con base en los resultados obtenidos para el VPN y la TIR, la mejor alternativa de inversión es la alternativa B, ya que presenta tanto el VPN más alto (17,7877) como la TIR más alta (25 %).

Interpretación:

- VPN: el VPN de la alternativa B es significativamente superior al de la alternativa A (17,7877 frente a 2,2754), lo que indica que la alternativa B generará un mayor valor presente neto, es decir, generará más valor en términos de ingresos futuros descontados a la tasa de interés utilizada.

- TIR: la TIR de la alternativa B (25 %) también es considerablemente más alta que la de la alternativa A (13 %), lo que significa que la rentabilidad de la

inversión será mayor, ya que se obtendrá un rendimiento más alto en relación con la inversión inicial.

En conclusión, aunque ambos indicadores son relevantes para tomar decisiones de inversión, generalmente se prefiere la opción con el VPN y el TIR más altos, ya que ambos reflejan una mayor rentabilidad. En este caso, la alternativa B cumple con ambos criterios, lo que la convierte en la opción más atractiva y rentable.

Seguidamente, a nivel general, este capítulo ha proporcionado una visión integral de la evaluación de alternativas de inversión, destacando la importancia de los indicadores financieros y el análisis de sensibilidad. Se ha demostrado cómo estas herramientas permiten a las empresas tomar decisiones de inversión más informadas, maximizar la rentabilidad y mitigar los riesgos asociados. Al comprender y aplicar los métodos presentados, los tomadores de decisiones pueden seleccionar proyectos que generen valor y se alineen con los objetivos estratégicos de la organización, asegurando así un uso eficiente de los recursos y una gestión financiera sólida.

Veamos ahora otro caso práctico para evaluar el riesgo y la rentabilidad de un proyecto en una empresa comercial dedicada a la venta de productos electrónicos.

La empresa La Mejor S. A. S. presenta su estado de situación financiera (ESF) al 31 de diciembre de 2024, en el cual se detallan los activos, los pasivos y el patrimonio que posee al cierre del ejercicio contable. Este estado financiero refleja la posición financiera de la empresa, mostrando un activo total de $18.000.000, compuesto por activos corrientes, como efectivo $5.000.000, cuentas por cobrar $3.000.000 e inventario $4.000.000, y activos no corrientes como maquinaria, $6.000.000. Asimismo, se incluyen sus obligaciones en los pasivos corrientes por $3.000.000 y su patrimonio, que asciende a $15.000.000, compuesto por capital social $5.000.000 y utilidades retenidas $10.000.000.

Se presentaron ingresos por $20.000.000, costo de ventas por $12.000.000, gastos operativos $3.000.000, gastos financieros por $500.000, aplicar impuesto de renta 35 %.

Tabla 18. *Estado de resultados*

Ingresos por ventas	**20.000.000**
Costos de ventas	12.000.000
Utilidad brita	**8.000.000**
Gastos operativos	3.000.000
Utilidad operativa	**5.000.000**
Gastos financieros	500.000
Utilidad antes de impuestos	**4.500.000**
Impuestos (35 %)	1.575.000
Utilidad Neta	**$ 2.925.000**

Fuente: *elaboración propia a partir de Excel.*

La empresa Comercial La Mejor S. A. S., dedicada a la venta de productos electrónicos, presenta su estado de flujos de efectivo correspondiente al año terminado el 31 de diciembre de 2024. Durante este periodo, la empresa obtuvo una utilidad neta de $2.925.000 y experimentó variaciones en su capital de trabajo, como una disminución en las cuentas por cobrar de $350.000, un aumento en el inventario de $800.000 y un incremento en las cuentas por pagar de $750.000.

Adicionalmente, realizó una compra de maquinaria por $2.300.000, clasificada como actividad de inversión, y recibió un préstamo a corto plazo de $1.200.000, registrado como actividad de financiamiento.

A partir de la anterior información, se elabora el estado de flujos de efectivo, utilizando el método indirecto, con el fin de analizar el comportamiento del efectivo generado y utilizado en las operaciones, inversiones y financiamiento de la empresa.

¿Con qué datos se hace el flujo de efectivo?

Para elaborar el estado de flujos de efectivo, se usan tanto datos del balance general como del estado de resultados.

Secciones del flujo de efectivo:

1. **Actividades de operación**
   Basadas en la utilidad neta (PyG) ajustada por cambios en capital de trabajo (balance).

   Utilidad neta

   - (+) Depreciación (si hay, la sumamos)
   - (+/-) Cambios en cuentas por cobrar
   - (+/-) Cambios en inventario
   - (+/-) Cambios en cuentas por pagar

   Datos usados:

   - Utilidad neta (PyG)
   - Cuentas por cobrar (balance)
   - Inventario (balance)
   - Cuentas por pagar (balance)

2. **Actividades de inversión**

   - Se registran compras o ventas de activos fijos (como maquinaria).
   - Datos usados:

   Compra/venta de maquinaria (cambio en activo no corriente)

3. Actividades de financiamiento

- Entradas o salidas por préstamos o cambios en el capital.
- Datos usados:
- Préstamos (pasivos)
- Aportes de socios o dividendos pagados (patrimonio)

Tabla 19. *Estado de resultados*

La Mejor SAS	
Estado de Resultados	
Del 31 de enero al 31 de diciembre de 2024	
Ingresos por ventas	**20.000.000**
Costos de ventas	12.000.000
Utilidad brita	**8.000.000**
Gastos operativos	3.000.000
Utilidad Operativa	**5.000.000**
Gastos financieros	500.000
Utilidad antes de impuestos	**4.500.000**
impuestos (35%)	1.575.000
Utilidad neta	**$ 2.925.000**

Fuente: *elaboración propia a partir de Excel.*

Tabla 20. *Estado de situación financiera*

La Mejor SAS					
Estado de Resultados					
Del 31 de enero al 31 de diciembre de 2024					
Activo			Pasivo		
Activo Corriente			Pasivo corriente		
Efecto	5.000.000		cuentas por pagar	2.000.000	
Cuentas por cobrar	3.000.000		Prestamo corto plazo	1.000.000	
inventario	4.000.000		total pasivo corriente		
Total activo corriente		12.000.000	**total pasivo**		**3.000.000**
Activo no corriente			patrimonio		
maquinaria	6.000.000		capital social	5.000.000	
Total activo corriente		6.000.000	Utilidades retenidas	10.000.000	
Total activo		**18.000.000**	**Total patrimono**		**15.000.000**
			Total pasivo + patrimonio		**18.000.000**

Fuente: *elaboración propia a partir de Excel.*

Tabla 21. *Flujo de efectivo*

3. Actividades de financiamiento	
(+) Préstamo recibido	1.200.000
(=) Flujo neto financiado	$ 1.200.000
(=) Aumento neto de efectivo	$ 1.775.000

1. Actividades de operación	
Utilidad neta:	
(+) Disminución en cuantas por cobrar	2.925.000
(-) Aumento en inventarios	350.000
(+) Aumento en cuentas por pagar	-800.000
(=) Flujo neto operativo	750.000
2. Actividades de inversión	**2.975.000**
Campra de maquinaria	-2.300.000

Fuente: *elaboración propia a partir de Excel.*

Indicadores

Se supone que el proyecto tiene una duración de 4 años, y que los flujos se repiten proporcionalmente.

- Inversión inicial (compra de maquinaria): -2.300.000 (año 0)
- Flujo neto operativo anual estimado: 2.875.000 (años 1 al 4)
- Préstamo recibido: 1.200.000 (año 0)

Datos para analizar:

Tabla 22. *Datos*

Concepto	Valor
Inversión inicial neta	-1.100.000
Flujos de efectivo anuales	2.875.000
Duración del proyecto	4 años
Tasa de descuento (TIR)	0.1 %

Fuente: *elaboración propia a partir de Excel.*

Ahora se realiza el flujo de efectivo:

Tabla 23. *Flujo de efectivo*

año	flujo de efectivo
0	-1.100.000
1	2.875.000
2	2.875.000
3	2.875.000
4	2.875.000

Fuente: *elaboración propia a partir de Excel.*

Se hallan los indicadores:

Tabla 24. *Indicadores de rentabilidad*

Indicador			Formula en Excel
VPN (10%)	8.013.363		VNA(10%;B19:B22)+B18
TIR	260%		TIR(B18:B22)
VAUE (Valor anual equivalente)	2.527.982		PAGO(10%;4;-B25;0;0)
Indice de Rentabilidad (IR)	8,28		VNA(10%;B19:B22)/ ABS(B18)
PRI (manual)	1 (se recupera en el primer año)	0,38 años aproximadamente	
PRI Descontado (manual)	Sumar flijos descontados hasta cubrir inversión	0,42 años	
Costo Anual Equivalente (CAE)	2527982,12	-	PAGO(10%;4;-B25)

Fuente: *elaboración propia a partir de Excel.*

Como resultado del ejercicio se indica lo siguiente:

- El proyecto presenta una excelente rentabilidad con un VPN significativamente alto y una TIR que supera ampliamente la tasa de descuento establecida.

- El periodo de recuperación, tanto simple como descontado, es extremadamente corto, lo que indica alta liquidez del proyecto.

- El índice de rentabilidad (IR) también muestra que el proyecto es altamente eficiente en el uso del capital.

Conclusiones del capítulo

A lo largo de este capítulo, se presentó la evaluación de alternativas de inversión, abordando desde los indicadores financieros clave hasta el análisis de sensibilidad y su aplicación práctica en la selección de proyectos, destacando la importancia de comprender los principios fundamentales de la evaluación de inversiones, así como la necesidad de desarrollar habilidades para interpretar y comparar proyectos bajo diferentes enfoques y escenarios.

Los indicadores financieros, como el VPN, la TIR, el VAUE y el IR, se han presentado como herramientas esenciales para evaluar la rentabilidad y viabilidad de los proyectos, permitiendo a los tomadores de decisiones identificar las alternativas que generan mayor valor y que mejor se alinean con los objetivos estratégicos de una organización.

Asimismo, se analizó en detalle el análisis de sensibilidad, tanto unidimensional como multidimensional, como una técnica fundamental para evaluar cómo los cambios en las variables clave pueden afectar el rendimiento de una inversión. Este análisis permite a los inversores tomar decisiones más informadas y mitigar riesgos potenciales, al comprender cómo las fluctuaciones en las variables estimadas pueden impactar la rentabilidad de un proyecto.

A través del caso práctico presentado, se logró ilustrar la aplicación de los conceptos teóricos en una situación real, permitiendo una comprensión más profunda detallada de las variables involucradas, las fórmulas utilizadas y los métodos de resolución.

Referencias

Alfaro, L. (2021). *Análisis y comparación de indicadores financieros de los sectores construcción, retail y eléctrico del periodo 2005-2019.* Universidad de Atacama. https://hdl. handle. net/20.500, 12740, 16202

Andrade Pinelo, A. M. (2017). Ratios o razones financieras. *Contadores & Empresas, (305)*, 53-55. Editorial Gaceta Jurídica S. A. http://hdl.handle.net/10757/622323

Blank, L. y Tarquin, A. (2012). Ingeniería económica (7.ª ed.). McGraw-Hill.

Carreño Flórez, E. F., Palacios Alvarado, W. y Medina Delgado, B. (2023). Aplicación móvil como recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas financieras en el ámbito educativo. *Praxis, 19*(3), 1-17. https://www.proquest.com/scholarly-journals/aplicación-móvil-como-recurso-didáctico-para-el/docview/2899209466/se-2?accountid=37408

Carrillo, P. (2017). Modelo de evaluación financiera de proyectos de inversión. Editorial Colegio de Estudios Superiores de Administración (CESA) - Repositorio Digital Institucional CESA. http://hdl.handle.net/10726/1744

Carrión, R. D. I., Huanca, O. A. C. y Tinitana, K. M. L. (2019). Los indicadores financieros y el impacto en la insolvencia de las empresas. *Observatorio de la economía latinoamericana (11)*, 54.

Gitman, L. J. y Joehnk, M. D. (2005). Fundamentos de inversiones. Pearson Educación"Lledó, P. (2023). *Evaluación financiera de proyectos: Un proyecto exitoso comienza antes de su gestión* (1.ª ed.). Autoedición / Pablolledo LLC. https://omeka.uci.ac.cr/biblioteca/files/original/5d877f45f198af3ecf5973e84c4af715.pdf

Meza Orozco, J. de J. (2017a). Evaluación financiera de proyectos (4.ª ed.). Ecoe Ediciones. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/lc/unad/titulos/70476

Meza Orozco, J. de J. (2017b). Matemáticas financieras aplicadas (6.ª ed.). Ecoe Ediciones. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/lc/unad/titulos/126552

Pérez Castañeda, S. S., Cruz Ramírez, D. y Quiroz, L. (2012). *Análisis de sensibilidad de indicadores financieros en la evaluación de las inversiones en mipymes.* En *Memorias del VI Encuentro de Investigación en Ciencias Económico Administrativas*. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. https://www.uaeh.edu.mx/investigacion/productos/5523/analisis_de_sensibilidad.pdf

Ramírez Loría, L. (2021). *Análisis de sensibilidad.* Universidad San Marcos. https://repositorio.usam.ac.cr/xmlui/bitstream/handle/11506/2427/LEC%20ADM%20PROY%200016%202021.pdf?isAllowed=y&sequence=1



Capítulo 6

Matemáticas financieras aplicadas a las finanzas internacionales

Justificación

En un entorno económico globalizado y cada vez más interconectado, las finanzas internacionales juegan un papel crucial en la toma de decisiones empresariales y en la gestión de riesgos a nivel mundial. La aplicación de las matemáticas financieras en este contexto es esencial para entender cómo los mercados internacionales de divisas, los tipos de interés y los flujos de capital influyen en las decisiones de inversión, financiamiento y cobertura de riesgos.

Este capítulo tiene como objetivo proporcionar a los estudiantes y profesionales las herramientas matemáticas necesarias para analizar y comprender los problemas financieros que enfrentan las empresas multinacionales, inversores internacionales y gobiernos en el ámbito global.

La correcta aplicación de estos métodos matemáticos es clave para tomar decisiones informadas que optimicen los resultados financieros y minimicen los riesgos asociados a las operaciones internacionales.

A lo largo del tiempo, la aplicación de modelos financieros ha permitido a las organizaciones identificar riesgos y, a su vez, encontrar formas de mitigarlos. Según Chen et al. (2017), las técnicas matemáticas pueden ser una herramienta crucial para optimizar la gestión de riesgos en el contexto internacional, ya que permiten modelar incertidumbres en escenarios de inversiones transnacionales.

Según Merton (2021), las finanzas internacionales están en constante evolución y las técnicas de matemáticas financieras han permitido a las empresas gestionar riesgos de manera más eficiente, a través de herramientas como los derivados financieros. Los contratos de futuros, opciones y *swaps* son fundamentales para cubrirse contra las incertidumbres que se presentan en los mercados internacionales. En este sentido, el conocimiento profundo de las matemáticas financieras es clave para las decisiones estratégicas de las empresas multinacionales.

Objetivo general

El objetivo de este capítulo es proporcionar los fundamentos y herramientas matemáticas necesarias para analizar y aplicar conceptos clave de las finanzas internacionales, permitiendo a los estudiantes y profesionales tomar decisiones informadas en un entorno financiero globalizado, al tiempo que se gestionan los riesgos derivados de los tipos de cambio, las tasas de interés y las inversiones internacionales.

Objetivos específicos

Tipo de cambio

Definir y comprender el concepto de tipo de cambio

Explicar qué es el tipo de cambio y su importancia en el comercio internacional y en los mercados financieros.

Identificar los factores que afectan el tipo de cambio, como las tasas de interés, la inflación, la balanza de pagos y las políticas monetarias.

Clasificar los tipos de cambio según el régimen cambiario

Describir los diferentes sistemas cambiarios, como el tipo de cambio flotante, fijo, y los sistemas híbridos.

Analizar las ventajas y desventajas de cada sistema cambiario para los países y las empresas.

Calcular y analizar el tipo de cambio en diversas situaciones

Resolver ejercicios prácticos que involucren el cálculo de tipos de cambio en distintas situaciones comerciales y financieras.

Analizar cómo las variaciones en el tipo de cambio afectan las decisiones de inversión y las transacciones internacionales.

Relatar el impacto del tipo de cambio en el comercio y la inversión internacional

- Explicar cómo las fluctuaciones en el tipo de cambio pueden influir en el costo de las exportaciones, las importaciones y las inversiones extranjeras directas.

- Evaluar cómo las empresas y los gobiernos gestionan los efectos de las fluctuaciones cambiarias.

Riesgo cambiario

Definir el riesgo cambiario y comprender sus fuentes

- Explicar qué es el riesgo cambiario y cómo se origina debido a las fluctuaciones en los tipos de cambio.
- Identificar las diferentes formas de riesgo cambiario, como el riesgo de transacción, el riesgo de traducción y el riesgo económico.
- Analizar las consecuencias del riesgo cambiario en las empresas internacionales
- Examinar cómo las empresas que operan internacionalmente están expuestas al riesgo cambiario en sus transacciones comerciales, balances financieros e inversiones.
- Identificar ejemplos de cómo las fluctuaciones del tipo de cambio pueden impactar las ganancias y la estabilidad financiera de una empresa.

Explorar métodos para medir y gestionar el riesgo cambiario

- Describir las principales herramientas para la gestión del riesgo cambiario, como los contratos de futuros, opciones y coberturas.
- Resolver problemas prácticos de cálculo de exposición cambiaria y aplicar estrategias para mitigar este riesgo, como las coberturas de divisas.
- Aplicar técnicas de cobertura (*hedging*) para mitigar el riesgo cambiario
- Explicar los diferentes tipos de instrumentos financieros utilizados para cubrir el riesgo cambiario, como los contratos a futuro, las opciones sobre divisas y los *swaps*.
- Resolver ejercicios prácticos en los que se utilicen coberturas para protegerse de las fluctuaciones del tipo de cambio.

Futuros sobre divisas

Definir qué son los contratos de futuros sobre divisas

- Explicar qué es un contrato de futuros sobre divisas y cómo funciona en los mercados financieros internacionales.
- Identificar las diferencias entre los contratos de futuros y otros instrumentos financieros, como los contratos a plazo.

Analizar el uso de los futuros sobre divisas en la gestión de riesgos

- Describir cómo los contratos de futuros sobre divisas pueden ser utilizados para cubrir el riesgo cambiario y para especular sobre las fluctuaciones del tipo de cambio.
- Evaluar las ventajas y desventajas del uso de futuros sobre divisas frente a otras herramientas de cobertura.

Calcular y aplicar los futuros sobre divisas en situaciones prácticas

- Resolver ejercicios prácticos que involucren la compra y venta de contratos de futuros sobre divisas, y calcular las ganancias o pérdidas resultantes.
- Analizar el impacto de las variaciones en el tipo de cambio en los contratos de futuros y cómo afectan las decisiones de cobertura o especulación.

Comprender la estructura de los contratos de futuros sobre divisas

- Explicar los términos clave de los contratos de futuros sobre divisas, como el tamaño del contrato, la fecha de vencimiento, el margen requerido y las liquidaciones.
- Identificar los factores que influyen en el precio de los futuros sobre divisas, como las tasas de interés y los tipos de cambio esperados.

Opciones sobre divisas

Definir qué son las opciones sobre divisas y cómo funcionan

- Explicar qué es una opción sobre divisas, diferenciando entre una opción de compra (*call*) y una opción de venta (*put*).
- Describir los términos clave de las opciones sobre divisas, como el precio de ejercicio (*strike price*), la prima y la fecha de vencimiento.

Analizar las estrategias de cobertura con opciones sobre divisas

- Describir cómo las opciones sobre divisas pueden ser utilizadas para gestionar el riesgo cambiario, tanto para cubrir exposiciones existentes como para especular sobre movimientos futuros del tipo de cambio.
- Explicar la ventaja de utilizar opciones en comparación con futuros en la cobertura de riesgos cambiarios.

Calcular el valor de las opciones sobre divisas

- Resolver problemas prácticos sobre el valor intrínseco y el valor temporal de las opciones sobre divisas, utilizando fórmulas básicas de opciones.
- Aplicar el modelo de Black-Scholes para calcular el valor de las opciones sobre divisas en situaciones específicas.

Evaluar las ventajas y desventajas de las opciones sobre divisas

- Analizar las ventajas de las opciones sobre divisas frente a otros instrumentos financieros, como los contratos a futuro, en cuanto a flexibilidad y protección frente a pérdidas ilimitadas.
- Identificar los riesgos asociados con las opciones sobre divisas, como el costo de la prima y el riesgo de no ejercicio.

Aplicar opciones sobre divisas en escenarios de cobertura y especulación

- Resolver ejercicios prácticos que involucren la compra y venta de opciones sobre divisas, evaluando el impacto de diferentes escenarios de tipo de cambio en la rentabilidad de la estrategia.

Arbitraje de divisas

Entender los conceptos básicos de arbitraje de divisas: explicar qué es el arbitraje de divisas, cómo se basa en las diferencias de tipos de cambio entre diferentes mercados y su impacto en la eficiencia de los mercados financieros internacionales.

Aplicar el principio de no-arbitraje a los mercados de divisas: analizar cómo las operaciones de arbitraje contribuyen a la corrección de las distorsiones en los precios de las divisas a nivel global.

Establecer la relación entre el arbitraje de divisas y la paridad del poder adquisitivo (PPA): investigar cómo las diferencias de precios entre mercados de divisas pueden influir en el valor de una moneda y en el ajuste de los tipos de cambio.

Desarrollar cálculos financieros para operaciones de arbitraje: proponer ejercicios prácticos de arbitraje entre divisas para ilustrar cómo se determinan las ganancias y riesgos potenciales, utilizando fórmulas matemáticas.

Estudiar el impacto del arbitraje de divisas en la liquidez de los mercados internacionales: identificar cómo las oportunidades de arbitraje afectan la estabilidad de los tipos de cambio y la liquidez global.

Financiamiento internacional

Definir los mecanismos de financiamiento internacional: explicar los diferentes métodos de financiamiento utilizados por empresas e instituciones en mercados internacionales, como préstamos, emisiones de bonos, capital de riesgo y líneas de crédito internacionales.

Explorar el uso de derivados financieros en el financiamiento internacional: analizar cómo los instrumentos derivados (futuros, opciones y *swaps*) se utilizan para gestionar los riesgos asociados con la financiación en divisas y los tipos de interés.

Aplicar la evaluación del costo de capital en contextos internacionales: Desarrollar cálculos para determinar el costo de capital en operaciones internacionales, considerando riesgos específicos de los mercados y divisas extranjeras.

Investigar las implicaciones fiscales y regulatorias en el financiamiento internacional: examinar cómo las políticas fiscales y las regulaciones de los países afectan las decisiones de financiamiento internacional y los flujos de capital.

Evaluar la viabilidad de proyectos internacionales mediante el uso de técnicas de matemáticas financieras: desarrollar casos prácticos que involucren la valoración de proyectos internacionales utilizando métodos como el valor presente neto (VPN) o la tasa interna de retorno (TIR), ajustados por el riesgo cambiario.

Arbitraje de divisas

En referencia al arbitraje de divisas podemos indicar, a manera conceptual, lo indicado por Carrascal et al. (2024), quien menciona que el arbitraje constituye una estrategia financiera mediante la cual los inversores obtienen beneficios, aprovechando las discrepancias en los precios de un mismo activo financiero cotizado en distintos mercados. Esta práctica es comúnmente considerada de bajo riesgo, dado que se fundamenta en la ejecución simultánea de operaciones de compra y venta que compensan dichas diferencias de valor. La esencia del arbitraje radica en explotar las ineficiencias del mercado, lo cual pone en entredicho la hipótesis de eficiencia total. La sincronización precisa de las transacciones resulta esencial para evitar tanto el riesgo de mercado como el riesgo de ejecución, este último entendido como la posibilidad de que los precios fluctúen antes de completar ambas operaciones.

En referencia al párrafo anterior podemos indicar que el arbitraje cambiario consiste en la estrategia de capitalizar las discrepancias en los tipos de cambio entre diferentes mercados de divisas con el objetivo de obtener beneficios sin asumir riesgos significativos. Esta práctica requiere la identificación de secuencias óptimas de conversión monetaria y la ejecución precisa de transacciones que exploten tales ineficiencias

del mercado. Los desarrollos recientes en tecnologías emergentes, como las redes neuronales y la computación cuántica, han incrementado considerablemente la capacidad de detección y ejecución eficiente de estas oportunidades de arbitraje.

En ese sentido, podemos concluir que el arbitraje de divisas constituye una técnica avanzada de negociación financiera que exige tanto una ejecución veloz como una meticulosa gestión del riesgo. Aunque presenta oportunidades de rentabilidad, implica también un nivel significativo de riesgo, y su efectividad depende en gran medida de la capacidad del operador para identificar y explotar ineficiencias temporales en el mercado cambiario.

Ejemplo didáctico:

Una práctica común en los mercados financieros internacionales es el arbitraje de divisas, el cual surge ante situaciones de desequilibrio provocadas por imperfecciones en el funcionamiento de la ley de oferta y demanda. Esta operación consiste en la compra y venta simultánea de un mismo activo financiero en distintos mercados, con el propósito de obtener una ganancia a partir de la diferencia de precios, siempre que esta supere los costos asociados a la transacción.

Este tipo de operaciones se basa en las variaciones existentes entre los tipos de cambio en diversos mercados internacionales. Se denomina arbitraje porque, a través de estas actividades, las disparidades tienden a corregirse gradualmente. No obstante, debido a la naturaleza dinámica de los mercados, dichas diferencias suelen reaparecer con el tiempo.

En el contexto del mercado de divisas, el arbitraje puede presentarse por las fluctuaciones en los tipos de cambio, lo que da lugar a modalidades específicas como:

- Arbitraje de dos puntos con tipos de cambio alineados
- Arbitraje entre la libra esterlina (GBP) y el yen japonés (JPY) en los mercados de Tokio y Londres, bajo condiciones de tipos de cambio equivalentes

Tabla 25. *Arbitraje de dos puntos*

Ciudad	1 GBP	1 JPY
Tokio	133,938	
Londres		0,00747

En el mercado cambiario de Tokio, una libra esterlina (GBP) se cotiza en 133,938 yenes japoneses (JPY), mientras que, en el Reino Unido, un yen japonés equivale a 0,00747 libras esterlinas. Estas tasas reflejan una paridad exacta entre ambas monedas, ya que el valor de 1 GBP expresado en JPY corresponde al recíproco del valor de 1 JPY expresado en GBP. En otras palabras, el valor inverso de 133,938 (JPY por GBP) es precisamente 0,00747 (GBP por JPY), lo que confirma la consistencia entre los dos tipos de cambio.

Esta equivalencia indica que no existe diferencia de precios entre las dos plazas cambiarias, lo cual descarta la posibilidad de arbitraje. En contextos financieros, el arbitraje se basa en explotar discrepancias en los tipos de cambio entre distintos mercados para obtener ganancias sin riesgo. Al no existir tal diferencia en este caso, se concluye que no hay oportunidad de realizar operaciones lucrativas mediante arbitraje entre el yen japonés y la libra esterlina.

El arbitraje de divisas es la práctica de aprovechar las diferencias en los tipos de cambio de una moneda en diferentes mercados. Los *traders* o inversores compran una moneda en un mercado donde es más barata y la venden en otro donde es más cara, obteniendo una ganancia libre de riesgo. Este proceso ayuda a equilibrar los precios en diferentes mercados y es una forma de asegurar que los tipos de cambio sean consistentes a nivel mundial.

Condiciones para el arbitraje:

- **Desalineación de precios:** existen diferencias en el tipo de cambio entre los mercados.
- **Movilidad de capitales:** los inversores pueden mover dinero rápidamente entre los mercados.

- **Ausencia de barreras:** no hay controles o restricciones para operar en los mercados de divisas.

Tipos de arbitraje de divisas:

Arbitraje triangular: aprovecha las diferencias en los tipos de cambio entre tres monedas diferentes.

Arbitraje de una sola moneda: ocurre cuando hay una diferencia en el precio de una moneda entre dos mercados.

Teoría de la paridad del poder adquisitivo (PPA): en un mercado sin fricciones (sin barreras de capital, sin costes de transacción), el tipo de cambio debería ajustarse para que el precio de un bien o servicio en dos países diferentes sea igual cuando se convierte a la misma moneda.

Ejemplo práctico de arbitraje de divisas:

Supongamos que tenemos tres monedas: USD (dólar estadounidense), EUR (euro) y GBP (libra esterlina).

Tipo de cambio en el mercado A:

1 EUR = 1.,20 USD

1 GBP = 1,30 USD

Tipo de cambio en el mercado B:

- 1 EUR = 1,15 USD
- 1 GBP = 1,25 USD

Aquí tenemos una oportunidad de arbitraje triangular.

Paso 1. Convertimos 1000 USD a EUR en el mercado A:

ecuación 78.
1000 USD * (1 EUR / 1,20 USD) = 0,8333 EUR

Paso 2. Convertimos esos 0,8333 EUR a GBP en el mercado B:
0,8333 EUR * (1,25 USD / 1 EUR) = 1,0416 USD

Paso 3. Con 1,0416 USD, regresamos a EUR en el mercado B:
1,0416 USD * (1 EUR / 1,15 USD) = 0,9053 EUR

Resultado: después de la transacción, obtienes 0,9053 EUR, lo que es una ganancia sobre la cantidad inicial de 1 EUR que se tenía. Esto ilustra cómo se aprovecha el arbitraje para ganar dinero sin riesgo.

Ejercicio práctico para estudiantes:

Supongamos que un estudiante tiene 100.000 USD y observa los siguientes tipos de cambio en dos mercados:

- Mercado A: 1 EUR = 1,10 USD
- Mercado B: 1 EUR = 1,12 USD

Pregunta: ¿Cómo puede el estudiante realizar una operación de arbitraje de divisas? ¿Cuál será su ganancia?

Financiamiento Internacional

El financiamiento internacional se refiere a la obtención de fondos por parte de empresas o gobiernos para financiar proyectos que cruzan fronteras internacionales. Este tipo de financiamiento involucra la movilización de recursos financieros a través de diferentes mercados internacionales, bancos y organizaciones multilaterales. Según el Fondo Monetario Internacional (FMI, 2024 a), los países miembros pueden acceder a recursos financieros para resolver problemas en su balanza de pagos, mediante acuerdos que ofrecen seguridad temporal para enfrentar dificultades económicas.

Principales fuentes de financiamiento internacional

Mercados internacionales de capital: a través de la emisión de bonos y acciones en mercados globales, las empresas emiten bonos y acciones en mercados globales para obtener fondos. Por ejemplo, en 2024, Argentina emitió un bono soberano en dólares para fortalecer sus reservas de divisas, lo que refleja cómo los gobiernos utilizan los mercados de capital para financiarse.

Préstamos bilaterales y multilaterales: los gobiernos o empresas obtienen préstamos de instituciones financieras internacionales, como el FMI o el Banco Mundial. México, por ejemplo, renovó su línea de crédito flexible con el FMI por 35.000 millones de dólares en 2024, ante riesgos externos y volatilidad económica.

Créditos sindicados: créditos otorgados por un grupo de bancos a una empresa o gobierno. El mercado de préstamos sindicados es dominante en Estados Unidos y Europa, y se utiliza para financiar operaciones corporativas importantes.

Mercados de divisas: la utilización de préstamos en divisas extranjeras para aprovechar tasas de interés más bajas. El mercado de divisas es el mayor mercado financiero del mundo, facilitando el intercambio de divisas para transacciones internacionales.

Riesgos asociados al financiamiento internacional

- **Riesgo cambiario:** el riesgo de que el tipo de cambio fluctúe en contra de la empresa. Este riesgo se refiere a las fluctuaciones en los tipos de cambio que pueden afectar los costos de financiamiento y los flujos de caja. Las empresas deben gestionar este riesgo mediante estrategias de cobertura o seleccionando monedas de financiamiento adecuadas.

Ejercicio *sobre riesgo cambiario:*

Contexto del ejercicio:

Escenario 1. Una empresa colombiana toma un crédito internacional de:

- USD 100.000
- Plazo: 6 meses
- Tasa de interés: 5 % anual.
- El crédito se paga en una sola cuota al final (capital + interés).
- El tipo de cambio actual (COP/USD) es 4000.
- Al vencimiento del crédito, el tipo de cambio ha subido a 4500.

Parte 1. Cálculo del pago total en dólares

Interés a 6 meses (5 % anual → 2,5 % semestral):

Interés = 100.000 × 2,5 % = 2500 USD

Pago total = 100.000 + 2500 = 102.500 USD

Parte 2. Conversión a pesos colombianos (COP)

a. Si el tipo de cambio se mantiene en 4000 COP/USD:
Pago en COP = 102.500 × 4000 = 410.000.000 COP

b. Si el tipo de cambio sube a 4500 COP/USD:
Pago en COP = 102.500 × 4500 = 461.250.000 COP

Impacto del riesgo cambiario

- Por efecto de la devaluación del peso, la empresa debe pagar 51.250.000 COP más, sin que haya cambiado nada del crédito en sí.

- Este es un claro ejemplo de riesgo cambiario, donde el tipo de cambio fluctúa en contra de la empresa.

Escenario 2. Cobertura cambiaria con contrato *forward*

La empresa firma un contrato forward al inicio del crédito para fijar el tipo de cambio a 4100 COP/USD para dentro de 6 meses. Esto significa que sin importar lo que pase con el mercado, el pago final se calculará a ese tipo de cambio.

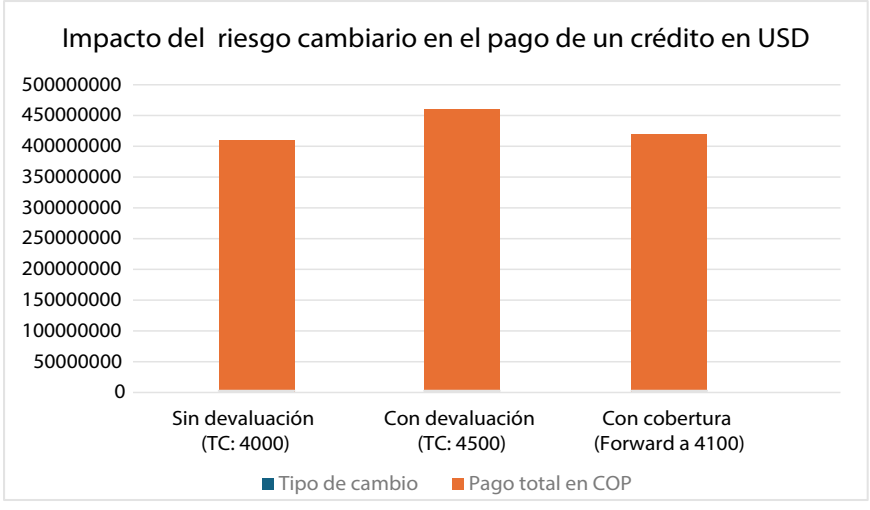
Pago en COP (con cobertura) = 102.500 × 4100 = 420.250.000 COP

Tabla 26. *Comparativa de pagos en pesos*

Escenario	Tipo de cambio	Pago total en COP
Sin devaluación (TC: 4000)	4000	410.000.000
Con devaluación (TC: 4500)	4500	461.250.000
Con cobertura (Forward a 4100)	4100	420.250.000

Fuente: *elaborada por Juan Carlos Henao Henao.*

Figura 22. *Impacto del tipo de cambio en el pago final*



Fuente: *elaborada por Juan Carlos Henao Henao.*

La Figura 22 compara el impacto del tipo de cambio en el pago final en pesos colombianos:

- **Sin devaluación:** la empresa paga menos, pero depende de que el mercado sea estable.
- **Con devaluación:** el pago en COP aumenta significativamente.
- **Con cobertura:** la empresa evita sorpresas, aunque pague un poco más que en el mejor escenario.
- **Riesgo país:** el riesgo de impago debido a inestabilidad económica o política en el país prestatario.
- **Riesgo de tasa de interés:** fluctuaciones en las tasas de interés que afectan el costo de los préstamos.

Ejercicio sobre riesgo de tasa de interés y spread

Contexto del ejercicio:

Escenario 1. Una empresa ha tomado un préstamo bancario a tasa variable. La tasa pactada es: Tasa de interés = Tasa LIBOR + Spread bancario.

Ecuación 79.

- Monto del préstamo: USD 1.000.000
- Tasa LIBOR al momento de la firma: 2,5 %
- *Spread* bancario: 3,0 %
- Plazo: un año (interés pagadero al final del periodo)
- Al cabo de 6 meses, la tasa LIBOR sube a 4,0 %

Parte 1. Calcular el costo total del préstamo al inicio

Tasa inicial = LIBOR (2,5 %) + *Spread* (3,0 %) = 5,5 %

Costo en intereses:

Interés = 1.000.000 × 5,5 % = 55.000 USD

Parte 2. ¿Qué pasa si la tasa LIBOR sube a 4,0 %?

Nueva tasa = LIBOR (4,0 %) + *Spread* (3,0 %) = 7,0 %

Nuevo interés si la tasa se ajusta en los próximos 6 meses:

Interés futuro = 1.000.000 × 7,0 % = 70.000 USD

Conclusión sobre el riesgo de tasa de interés

La empresa se enfrenta al riesgo de que la tasa variable aumente, lo cual eleva su costo financiero.

En este caso, el aumento en LIBOR del 2,5 % al 4,0 % hizo que el costo del préstamo pase de USD 55.000 a USD 70.000, es decir, un incremento de USD 15.000.

El *spread* se mantiene constante porque refleja el margen que cobra el banco por encima de la tasa de referencia, pero el riesgo está en la variabilidad de la tasa base (LIBOR).

Escenario 2. Préstamo a tasa fija

La empresa también pudo haber tomado el mismo préstamo a una tasa fija del 6,0 % anual.

- Monto del préstamo: USD 1.000.000
- Tasa fija: 6,0 %
- Plazo: un año

Interés total a pagar = 1.000.000 × 6,0 % = 60.000

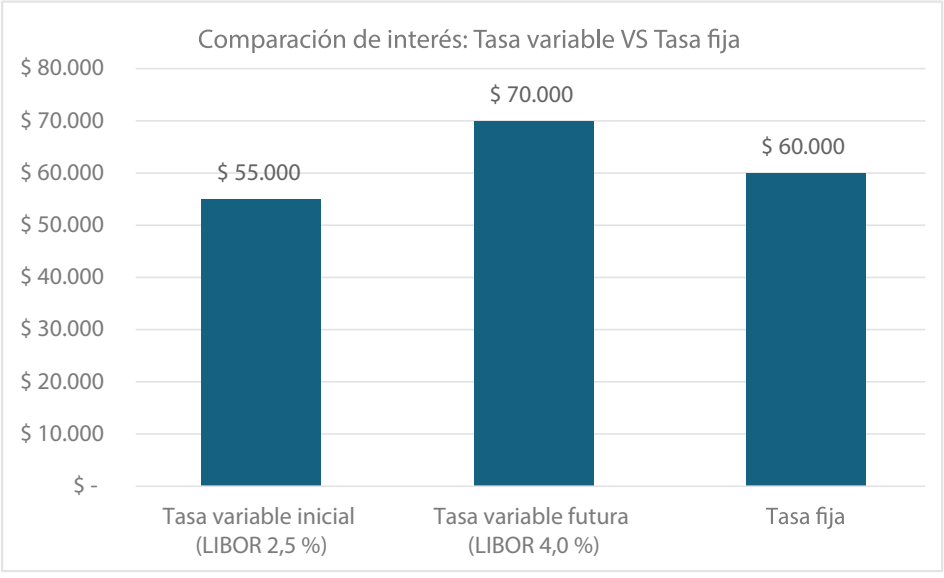
Tabla 27. *Comparación tasa fija vs. tasa variable*

Escenario	Tasa (%)	Interés a pagar (USD)
Tasa variable inicial (LIBOR 2,5 %)	5,5 %	55.000
Tasa variable futura (LIBOR 4,0 %)	7,0 %	70.000
Tasa fija	6,0 %	60.000

Fuente: *elaborada por Juan Carlos Henao Henao.*

Figura 23. *Comparativa de interés a pagar*

- Eje X: tipo de préstamo
- Eje Y: interés en USD



Fuente: *elaborada por Juan Carlos Henao Henao.*

- La tasa variable con LIBOR bajó (2,5 %) es más barata al principio.
- Pero si la tasa base sube (LIBOR a 4,0 %), el costo total supera al de la tasa fija.
- La tasa fija ofrece estabilidad, aunque no necesariamente el menor costo.

Se puede evidenciar claramente el riesgo de tasa de interés y cómo el *spread* se mantiene fijo mientras la tasa base varía.

Escenario 3. Cobertura con un *swap* de tasas

Supongamos que la empresa tomó el préstamo original a tasa variable (LIBOR + 3 %), pero firma un *swap* de tasas de interés con otra entidad financiera.

Swap:

- La empresa paga tasa fija del 6,0 %
- Y recibe tasa variable (LIBOR actual)

Resultado neto del swap:

- Paga: 6,0 % (fijo)
- Recibe: LIBOR (actual)
- Pago neto: 6,0 % - LIBOR

Pero como su préstamo es LIBOR + 3,0 %, al sumar todo:

$$\textbf{Pago total} = (\text{LIBOR} + 3{,}0\ \%) + (6{,}0\ \% - \text{LIBOR}) = 9{,}0\ \%$$

Parece alto, pero esto depende del valor del *swap* en ese momento. Para que el *swap* tenga sentido, lo usual es que se diseñe para igualar o mejorar el escenario de tasa fija directa. Vamos a corregir eso a un caso más realista:

Swap estructurado: pagar 6,0 % fijo en total

Se puede estructurar un *swap* para que el costo total final del préstamo se convierta en 6,0 % fijo, es decir, la empresa sigue con su préstamo a LIBOR + 3,0 %, pero con un *swap* que le cubre la variación de LIBOR.

Resultado:

- Si la LIBOR sube a 4,0 %, no afecta: sigue pagando 6,0 %
- Si baja a 1,0 %, igual: sigue pagando 6,0 %

Interés total a pagar:

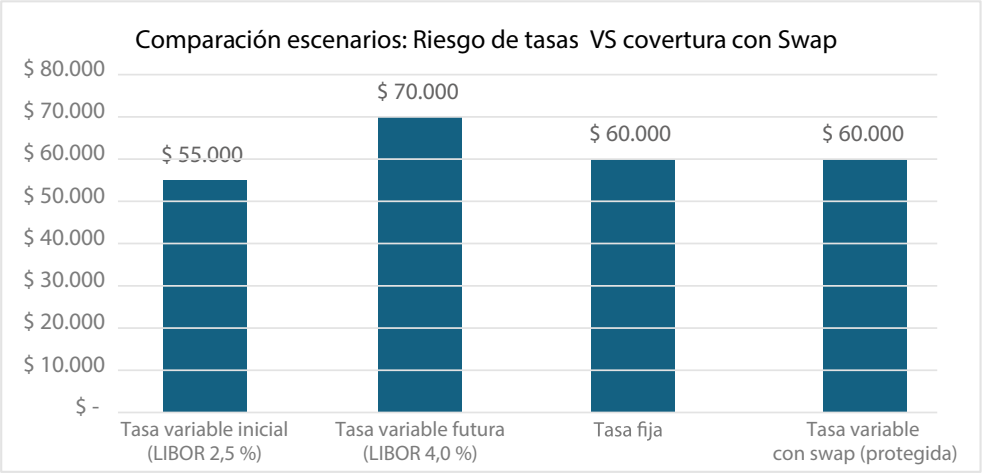
$$\text{Interés} = 1.000.000 \times 6{,}0\,\% = 60.000\ \text{USD}$$

Tabla 28. *Actualización tabla incluyendo el swap*

Escenario	Tasa (%)	Interés a pagar (USD)
Tasa variable inicial (LIBOR 2,5 %)	5,5 %	55.000
Tasa variable futura (LIBOR 4,0 %)	7,0 %	70.000
Tasa fija	6,0 %	60.000
Tasa variable con swap (protegida)	6,0 %	60.000

Fuente: *elaborada por Juan Carlos Henao Henao.*

Figura 24. *Comparativa de interés a pagar*



Se puede evidenciar claramente el riesgo de tasa de interés y cómo el spread se mantiene fijo mientras la tasa base varía y a la vez, cómo el *swap* protege ante la variación de la LIBOR.

Tipos de financiamiento

1. **Deuda:** préstamos otorgados por instituciones financieras o la emisión de bonos.

2. **Equidad:** emisión de acciones o participación en la propiedad de la empresa.

3. **Leasing y financiamiento de proyectos:** financiamiento para la adquisición de bienes de capital o proyectos específicos.

Ejemplo práctico de financiamiento internacional:

Supongamos que una empresa estadounidense necesita financiar la construcción de una planta en México y está considerando dos opciones:

Opción 1. Emitir un bono en el mercado de deuda de EE.UU. con una tasa de interés del 5 %.

Opción 2. Obtener un préstamo en pesos mexicanos a una tasa del 8 %.

Si la empresa opta por el préstamo en pesos, debe considerar el riesgo cambiario, ya que las fluctuaciones del tipo de cambio podrían aumentar el costo de la deuda si el peso mexicano se deprecia respecto al dólar.

Cálculo del costo total del financiamiento: Supongamos que la empresa necesita 10 millones de USD para el proyecto.

Opción 1. 10 millones USD * 5 % = 500.000 USD en intereses anuales.

Opción 2. Si el préstamo es en pesos y la tasa es del 8 %, se debería convertir el monto de la deuda a pesos, lo cual dependería del tipo de cambio.

Ejercicio práctico para estudiantes:

Imaginemos que una empresa canadiense desea emitir un bono por 5 millones de CAD a 5 años. Los tipos de interés actuales son los siguientes:

- **Mercado canadiense:** 3 %
- **Mercado estadounidense:** 4 %

Pregunta: ¿Cuál es la opción más barata para la empresa, considerando las tasas de interés, y cómo debería gestionar el riesgo de tipo de cambio si decide emitir el bono en el mercado estadounidense?

Tipo de cambio

En los últimos años, debido a situaciones internacionales, la economía global ha tenido una serie de choques nunca antes vistos. La pandemia del COVID-19 y la invasión de Rusia a Ucrania, contribuyeron al aumento significativo de la inflación global. En

respuesta a lo anterior, la política monetaria a nivel global ha tenido que ajustarse para poder contener las presiones inflacionarias y las condiciones financieras globales (Banco de México, 2022).

El Banco de México (2022) también publicó que, debido a dichos acontecimientos, se han presentado movimientos en los tipos de cambio de las diferentes economías a nivel mundial de forma significativa, lo que ha ocasionado que el dólar sea una moneda fuerte frente a diferentes economías, incluyendo las avanzadas.

Según el Observatorio Venezolano de Finanzas (OVF, 2020), el tipo de cambio contribuye de forma decisiva a definir la composición de la balanza de pagos y la estructura de la economía, lo anterior de acuerdo al nivel en el que se incentiven o desestimulen las exportaciones. Existen distintos arreglos cambiarios, entre los que se encuentra el tipo de cambio fijo, que consiste en que el banco central se compromete a la compraventa de divisas a un tipo de cambio predeterminado. Lo anterior implica que el banco central no controle el nivel de reservas internacionales, provocando así la obligación de comprarlas y venderlas a ese tipo de cambio.

Por otra parte, cuando predomina el tipo de cambio flexible, el banco central no interviene en el mercado de cambio, lo que provoca que las reservas internacionales no varíen, pero el tipo de cambio fluctúa, lo que refleja las condiciones del mercado.

Es necesario distinguir entre tipo de cambio nominal y tipo de cambio real, el primero es la relación de cambio que guardan dos monedas, mientras que el segundo hace referencia al poder de compra interno y externo de la moneda nacional. El tipo de cambio real se puede expresar de la siguiente forma:

Ecuación 80.

$$TCR = TCN * (PE/PD).$$

donde:

TCR = tipo de cambio real

TCN = tipo de cambio nominal

PE = precios externos

PD = precios domésticos

Así, el TCN es la relación de cambio entre dos monedas de manera tal que cuando el TCN se deprecia ello significa que la moneda extranjera se hace más cara. Por ejemplo, si el TCN del US$/Euro pasa de 1,10 a 1,20, ello quiere decir que el dólar se depreció y el euro se apreció.

Tipo de cambio real

El tipo de cambio real es una medida de valor de una divisa frente a un promedio ponderado de varias extranjeras, las cuales son divididas por un deflactor de precios, en este caso, al consumidor. Cuando el índice aumenta, implica que las exportaciones se han vuelto más caras y las importaciones más baratas, por lo que indica una pérdida de competitividad comercial (CEMLA, 2023).

Tipo de cambio nominal

Es el que indica cuánto se pagará o se deberá recibir un préstamo o depósito; representa el nivel de rentabilidad de una operación financiera, sin incluir comisiones ni gastos financieros (Pedroza, 2024).

Futuros y opciones sobre divisas

Los futuros de divisas son contratos negociables que garantizan el precio de intercambio de una divisa por otra en el futuro. Es decir, es un convenio regulado que debe detallar el precio en el que una divisa debe comprarse o venderse en una fecha predeterminada, lo cual estipula el tipo de cambio de dos divisas en el futuro.

Los contratos sobre futuro de divisas funcionan como otros contratos en el mercado, pues operan en mercados regulados y crean un vínculo legal entre las partes. Cuando se cumple la fecha de vencimiento, el comprador y vendedor están obligados a cumplir con lo estipulado en el contrato, es decir, realizar la transacción de las divisas según

la tasa de cambio que se convino en el contrato. Sin embargo, dichos contratos también pueden ser adquiridos o vendidos antes de la fecha, lo cual arrojará beneficios o pérdidas para quienes participen en la negociación.

Características del mercado de divisas a futuro

Los diversos mercados de futuros sobre divisas establecen las características y especificaciones de los contratos, los cuales pueden tener diferencias sustanciales. Por ejemplo, el Chicago Mercantil Exchange (CME) cotiza futuros por trimestre, mientras que el Mercado Español de Futuros Financieros (MEFF) cotiza de forma perpetua, lo que significa que no tiene fecha de vencimiento.

Tabla 29. *Especificaciones clave y ejemplos de futuros de divisas*

Mercado	Regulado (bolsa de negociación)
Código de producto (*ticker*)	Identifiquen el tipo de contrato, ej.: EC corresponde al CME y Rolling FX es el futuro sobre divisas del MEFF
Tamaño del contrato	Unidades de la divisa cotizada que se ofertan/demandan por cada unidad de la divisa base, ej.: el futuro sobre EUR/USD del CME tiene como base 125 mil euros | el xRolling FX del MEFF establece un nominal de 10 mil euros
Fecha de vencimiento	CME cotiza contratos trimestrales: marzo, junio, septiembre, diciembre | MEFF cotiza contratos perpetuos
Método de liquidación	Por lo general en efectivo: CME estipula el pago en la divisa subyacente | MEFF basa todas las liquidaciones en euros
Variación (*tick*)	Incremento mínimo posible del movimiento del precio de un contrato: CME establece 0,00001 por incremento del euro | MEFF establece USD 0,00001 en el futuro sobre EUR/USD

Fuente: *Díaz (2020).*

Factores que intervienen en las tasas de cambio

Diversos son los factores que influyen en la evolución de los tipos de cambio, incluido entre ellos aspectos clave como la situación general de un país, desempeño

económico y la estabilidad que posee, igual que el sentimiento del mercado. Un buen clima económico se convierte en la base para llevar a cabo negocios en un país, estimulando la inversión extranjera, lo que provoca la demanda de su moneda, y con esto aumenta su valor (Díaz, 2021).

Así mismo, Díaz (2021) afirma que el mercado de dividas puede ser complejo, pues los factores que intervienen en él no suceden de forma aislada, sino todo lo contrario, todos están interconectados. Ya sea para llevar a cabo operaciones a futuro o con divisas al contado, es sumamente importante identificar las bases de este sistema.

Tabla 30. *Factores clave en el mercado de divisas*

En este apartado vamos a plasmar los cinco factores clave que influyen en el mercado de divisas, ya sea de forma futura o de contado"

Inflación	Recesión	Tipos de interés	Deuda pública	Especulación
Es la diferencia existente en el poder adquisitivo de las divisas entre países. Un nivel bajo de inflación en un país supone un mayor poder adquisitivo, en tanto que un país con tasa de inflación alta presupone una depreciación de su moneda frente a la divisa de su socio comercial.	Es un efecto donde la economía se vuelve menos atractiva para la inversión y el ahorro de un país, lo que provoca un aumento en el interés de la inversión en otras divisas, lo que ocasiona la caída del valor de su moneda.	La divisa y el tipo de interés guardan una estrecha relación. En esta teoría, un país con tipos de interés altos atrae a la inversión y viceversa. Además, provoca el movimiento de capitales de dicho país. a otros con mayor interés.	Factor determinante en el valor de una divisa. Es un efecto ligado a la credibilidad del país para cubrir su deuda pública. Si un país tiene una percepción económica general de poder saldar su deuda, el valor de su divisa puede mantenerse.	En general, cuando se prevé que una divisa subirá su valor, los inversores que desean beneficiarse de dicho incremento pueden impulsar el valor de dicha divisa frente a otra. Generalmente, la proyección es a largo plazo, donde quienes especulan son los propios bancos centrales.

Fuente: *elaboración propia a partir de Díaz Zúñiga (2021).*

Riesgo cambiario

El riesgo cambiario se define como la incertidumbre asociada con las fluctuaciones futuras en el valor de una divisa, las cuales pueden influir directamente en los precios de los activos y pasivos expresados en moneda extranjera al momento de su conversión a moneda local (Díaz y Redondo, 2021). En este contexto, Morales (2019) describe el descalce cambiario como la discrepancia que puede presentarse entre los activos y pasivos en moneda extranjera, los flujos de ingresos y egresos en dicha moneda, o una combinación de estos factores dentro de las corporaciones, generando un desafío adicional en la gestión financiera frente a los cambios en el tipo de cambio.

Con base en lo anterior, en el ámbito empresarial esto puede aplicarse así: "teniendo en cuenta que un desenlace cambiario se traduce en probables pérdidas financieras, puesto que periodos de excesiva volatilidad al momento de su conversión a moneda local (Kozikowski, 2013, como se citó en Díaz Restrepo y Redondo Ramírez, 2019)".

Si los pasivos y/o egresos en moneda extranjera superan a los activos y/o ingresos en moneda extranjera, una depreciación de la divisa nacional afectaría negativamente a la firma. Sin embargo, ante una devaluación o depreciación del tipo de cambio, el efecto neto de estos cambios en las corporaciones es ambiguo, puede suceder que algunas empresas sean las que tengan mayor elasticidad de sus ingresos a variaciones del tipo de cambio, viendo aumentadas sus ventas, luego de una devaluación o depreciación. Es de esperar que las empresas exportadoras (quienes pueden conseguir una cobertura operativa al calzar su deuda en dólares con el flujo de ingresos) sean las que relativamente estén más endeudadas en dólares, pero al mismo tiempo, se vean favorecidas por el aumento de competitividad.

Efectos de una mayor inestabilidad en el tipo de cambio

A continuación, tomando lo indicado por KPMG (2021), se exponen una síntesis de los posibles efectos que una empresa podría experimentar frente a un aumento en las variaciones de tipo de cambio:

- **Riesgo de tipo de cambio por transacciones:** se origina como una discrepancia temporal entre el tipo de cambio vigente al momento de asumir el

compromiso de pago y el tipo de cambio aplicado al ejecutar la transacción. Este fenómeno influye directamente en el flujo de caja, los estados de resultados, el balance general y todos los indicadores financieros.

- **Riesgo de traducción:** se manifiesta como una sensibilidad contable en los estados financieros consolidados frente a fluctuaciones en el tipo de cambio. Afecta de manera directa el capital contable, la deuda neta, los estados de resultados y los indicadores.

- **Riesgo estructural:** se manifiesta como una sensibilidad contable en los estados financieros consolidados frente a fluctuaciones en el tipo de cambio. Afecta de manera directa el capital contable, la deuda neta, los estados de resultados y los indicadores.

Enfoques para minimizar el impacto del riesgo de cambio

El aumento del riesgo de cambio, derivado de los incrementos en la volatilidad del mercado de divisas, puede ser reducido mediante la implementación de diversas estrategias. A continuación, se presentan las principales estrategias:

- **Cobertura interna:** se trata de una estrategia de manejo en la que el riesgo asociado a un activo se equilibra con el rendimiento de otro activo, y viceversa. En términos fundamentales, el flujo de caja de uno debe contrarrestar el flujo de caja del otro, logrando de este modo el objetivo de cobertura.

- **Instrumentos derivados financieros:** un derivado financiero de divisas es un instrumento cuyo valor está vinculado al tipo de cambio y se utiliza para transferir el riesgo cambiario al adoptar una posición opuesta a la que se desea cubrir. Los derivados de divisas más frecuentes incluyen los contratos a plazo (*forwards*), los *swaps* y las opciones.

- **Estrategia combinada:** una empresa puede elegir una estrategia que combine la cobertura interna con el uso de derivados *plain vanilla*, con el fin de fortalecer la cobertura natural.

En particular, respecto al empleo de instrumentos financieros derivados, los más comunes para la gestión del riesgo cambiario en el ámbito empresarial son los contratos a plazo (*forwards*), los *swaps* y las opciones de divisas (incluyendo estrategias que combinan varios tipos de instrumentos). A continuación, se detallan las principales características de cada uno de ellos:

- ***Forwards* de moneda:** los contratos *forward* de moneda son acuerdos para intercambiar una cantidad determinada de una divisa por otra en una fecha futura, a un tipo de cambio acordado previamente. Se emplean para reducir el riesgo cambiario asociado a transacciones en divisas extranjeras.

- ***Swaps* de moneda:** los contratos de intercambio de tasas de interés (*swaps*) implican el cambio de flujos de pagos de intereses en una moneda por flujos en otra. Se utilizan para gestionar el riesgo de tasa de interés y modificar el perfil de moneda de instrumentos financieros, así como para proteger inversiones en subsidiarias extranjeras.

- **Opciones de moneda:** los contratos de opciones permiten, pero no obligan, comprar (*call*) o vender (*put*) una moneda a un tipo de cambio acordado y en una fecha determinada. Una opción *call* sobre una moneda implica necesariamente una opción *put* sobre la otra moneda involucrada en el contrato.

Ejemplo didáctico sin considerar cobertura:

La Compañía ARSE se dedica a importar productos desde Estados Unidos para comercializarlos en Perú, utilizando el sol (PEN) como moneda local. Los pagos por las importaciones se realizan en dólares estadounidenses (USD). Al 26 de febrero de 2021, tenía programada una compra de mercancía por USD 1.000.000 para el 27 de abril de 2021, lo que la exponía al riesgo de una depreciación del sol con respecto del USD.

Sin la cobertura: al principio, la Dirección Financiera de la compañía no había considerado implementar una estrategia de cobertura contra el riesgo de cambio, ya que no había anticipado el impacto de las elecciones generales reales.

Tabla 31. *Desembolso en soles (PEN) para adquirir USD 1MM*

Desembolso proyectado	3.640.000
Desembolso efectuado	3.830.000

En el momento de la compra de la mercancía, el tipo de cambio fue de 3,83 USD/PEN, lo que habría generado un costo de PEN 3.830.000, es decir, PEN 190.000 adicionales a lo previsto inicialmente.

Ejemplo didáctico considerando la cobertura:

La Gerencia de Riesgos Financieros de la Compañía X identificó que la volatilidad del tipo de cambio tiende a incrementarse significativamente durante los procesos electorales. Por ello, recomendó establecer un contrato *forward* para adquirir 1.000.000 de USD a un tipo de cambio de 3,70 USD/PEN

Tabla 32. *Desembolso en soles (PEN) para adquirir USD 1MM*

Operación sin cobertura	3.830.000
Operación con cobertura	3.700.000

En la fecha de vencimiento, la compañía adquirió 1.000.000 de USD al tipo de cambio acordado en el contrato *forward*, que resultó ser un 3,39 % inferior al tipo de cambio *spot*, lo que le permitió ahorrar PEN 130.000.

Referencias

Abriendo Mercados. (s.f.). *Estrategias de financiamiento para empresas internacionales.* Recuperado de https://abriendomercados.com/estrategias-de-financiamiento-para-empresas-internacionales/

Banco de México (2022). Evolución reciente de los tipos de cambio en economías emergentes ante la normalización de la política monetaria global. Extracto del informe trimestral Julio-Septiembre. https://www.banxico.org.mx/publicaciones-y-prensa/informes-trimestrales/recuadros/%7B264EE9A8-7D72-414C-D31C-5F222D2CC880%7D.pdf

Cabeza de Vergara, L. y Castrillón Cifuentes, J. (2017). Matemáticas financieras (5.ª ed., reimp.). Editorial Universidad del Norte.

Carrascal, G., Roman, B., del Barrio, A. y Botella, G. (2024). Differential evolution VQE for crypto-currency arbitrage. Quantum optimization with many local minima. *Digital Signal Processing, 148,* 104464. https://doi.org/10.1016/J.DSP.2024.104464

Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos [CEMLA] (2023). Tipos de cambio reales. Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos. https://www.cemla.org/DatosSelectosMacroeconomicos/Tipo%20de%20Cambio%20Real%20v5.html

Chen, G., Chen, Y. y Liao, W. (2017). Mathematical finance in international markets. *Journal of International Finance, 22*(1), 105-121.

Díaz, A. y Redondo, F. (2019). *Riesgo cambiario en la gestión financiera*. Editorial Universitaria.

Díaz Restrepo, C. A. y Redondo Ramírez, M. I. (2019). Eficiencia del forward como instrumento de cobertura del riesgo cambiario en las empresas que realizan operaciones de comercio exterior, 2011-2017. *Semestre Económico, 22*(51), 45-62. https://doi.org/10.22395/seec.v22n51a3

Díaz Zúñiga, E. (2021). *¿Cómo operar en el mercado de futuros sobre divisas?* IG. https://www.ig.com/es/estrategias-de-trading/-como-operar-en-el-mercado-de-futuros-de-divisas--210908

Fondo Monetario Internacional. (2024a). Informe anual 2024: *Resiliencia ante el cambio*. Fondo Monetario Internacional. https://www.imf.org/external/pubs/ft/ar/2024/spanish/

Fondo Monetario Internacional. (2024b). *Perspectivas de la economía mundial: Un crecimiento lento pero firme, resiliencia en medio de la divergencia*. Fondo Monetario Internacional. https://www.imf.org/en/publications/weo/issues/2024/04/16/world-economic-outlook-april-2024

KPMG. (2021). *Impactos de la volatilidad del tipo de cambio en las empresas.* KPMG Consultores.

Merton, R. (2021). *Continuous-time finance* (3rd ed.). Wiley.

Morales, J. (2019). *El descalce cambiario y su impacto en la gestión empresarial.* Editorial Empresarial.

Observatorio Venezolano de Finanzas [OVF] (2020). Regímenes cambiarios y Tipo de cambio. Comisión Permanente de Finanzas y Desarrollo Económico. https://observatoriodefinanzas.com/wp-content/uploads/REGIMENES-CAMBIARIO-Y-TIPO-DE-CAMBIO.pdf

Pedroza, S. (2024). Tasa de interés nominal, Qué es y cómo se calcula. Economipedia. https://economipedia.com/definiciones/tasa-de-interes-nominal-tin.html

Rosillo C., J. S. (2009). *Matemáticas financieras para decisiones de inversión y financiación.* Biblioteca Banco de la República.

Glosario de términos

Este glosario ofrece definiciones clave para los temas de arbe de divisas, riesgo cambiario, futuros y opciones sobre divisas y financiamiento internacional, que son esenciales para el estudio y la comprensión de las finanzas internacionales.

Arbitraje de divisas: estrategia financiera que permite obtener ganancias sin riesgo al aprovechar las diferencias de precios de una moneda entre distintos mercados.

Arbitraje triangular: técnica de arbitraje en el mercado de divisas que implica realizar tres transacciones para aprovechar las discrepancias entre tres monedas.

Bonos internacionales: instrumentos de deuda emitidos por gobiernos o empresas en mercados internacionales, que permiten financiar proyectos a través de la emisión de títulos de deuda.

Cobertura cambiaria (*hedging*): estrategia utilizada para protegerse de las fluctuaciones del tipo de cambio, utilizando instrumentos como futuros, opciones o *swaps*.

Contratos a plazo (*forward*): acuerdos entre dos partes para intercambiar una moneda por otra a un tipo de cambio acordado hoy, pero en una fecha futura, no estandarizado como los futuros.

Coste de capital: tasa de retorno esperada por los inversores en una empresa o proyecto. Es un indicador del costo de financiarse a través de deuda o emisión de acciones.

Financiamiento internacional: proceso de obtener recursos financieros en mercados internacionales para financiar actividades comerciales o de inversión en diferentes países.

Futuros: contratos financieros que obligan a las partes a comprar o vender un activo en una fecha futura a un precio acordado hoy. Son utilizados para cubrir riesgos o especular sobre movimientos de precios.

Futuros sobre divisas: contratos financieros estandarizados que obligan a la compra o venta de una divisa a un precio acordado en el futuro.

Opciones: instrumentos financieros que otorgan a su comprador el derecho (pero no la obligación) de comprar o vender un activo (como divisas) a un precio específico en una fecha futura.

Opciones sobre divisas: contratos que otorgan el derecho (pero no la obligación) de comprar o vender una divisa a un precio fijo en una fecha futura.

Paridad del poder adquisitivo (PPA): teoría económica que sugiere que los tipos de cambio entre dos monedas deberían ajustarse para reflejar el poder adquisitivo relativo de las dos economías.

Prima de riesgo: rendimiento adicional que los inversores requieren para asumir el riesgo de un activo en comparación con un activo libre de riesgo.

Riesgo cambiario: riesgo asociado con la variación en los tipos de cambio que afecta las transacciones internacionales y las inversiones extranjeras.

Riesgo de crédito: riesgo de que una contraparte no cumpla con sus obligaciones financieras, como el pago de un préstamo o el cumplimiento de un contrato.

Riesgo de traducción: riesgo que enfrentan las empresas multinacionales al convertir los estados financieros de una moneda extranjera a la moneda local, debido a las fluctuaciones cambiarias.

Riesgo de transacción: tipo de riesgo cambiario que afecta las transacciones comerciales ya pactadas, debido a las fluctuaciones en el tipo de cambio entre el momento de la negociación y el momento del pago.

Riesgo económico: riesgo derivado de la fluctuación del tipo de cambio que puede afectar la competitividad a largo plazo de una empresa o país en el mercado internacional.

Riesgo país: riesgo asociado con la inestabilidad económica, política o social de un país, que puede afectar a los inversionistas extranjeros.

Sistema cambiario: regla o conjunto de normas que un país utiliza para determinar el valor de su moneda en relación con otras monedas. Puede ser flotante, fijo o híbrido.

***Swaps* de divisas:** acuerdo en el que dos partes intercambian flujos de efectivo en diferentes monedas, generalmente para cubrir el riesgo cambiario o financiar operaciones internacionales.

Tipo de cambio: valor de una moneda en términos de otra. Se utiliza para determinar el costo de una divisa extranjera en el mercado.

Tipo de cambio fijo: sistema cambiario en el que el valor de una moneda es mantenido constante en relación con otra moneda o una canasta de monedas, usualmente con la intervención del banco central.

Tipo de cambio flotante: sistema cambiario en el que el valor de una moneda se determina por la oferta y la demanda en el mercado sin intervención del gobierno.

Tipo de cambio real: tipo de cambio ajustado por la inflación relativa entre dos países, que refleja el valor real de las monedas para fines de comercio.

Sello Editorial
Universidad Nacional
Abierta y a Distancia

Uno de los puntos más fuertes de esta obra es su enfoque verdaderamente práctico. Lejos de ser una mera colección de fórmulas, el libro se enriquece con una gran cantidad de ejemplos y ejercicios resueltos y propuestos. Esto permite al lector no solo comprender la teoría, sino también aplicarla en situaciones reales, reforzando el aprendizaje y construyendo confianza en el manejo de los cálculos. La claridad en la exposición de cada tema es notable, utilizando un lenguaje técnico, pero accesible, lo cual es fundamental en un área tan específica

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA (UNAD)

Sede Nacional José Celestino Mutis
Calle 14 Sur 14-23
PBX: 344 37 00 - 344 41 20
Bogotá, D.C., Colombia

www.unad.edu.co

Para acceder a la versión en línea de este libro, escanee el siguiente código.