Universidad Nacional Abierta y a Distancia
Sello Editorial

FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO VECTORIAL CON ALGUNAS APLICACIONES

Grupo de Investigación

GIEPRONAL

Escuela de Ciencias Básicas, Tecnología e Ingeniería - ECBTI

Universidad Nacional Abierta y a Distancia

Sello Editorial

FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO VECTORIAL CON ALGUNAS APLICACIONES

Autores:
Mag. Randy Zabaleta M.
PhD. Luis R. Fuentes C.
PhD. Jeinny M. Peralta P.

Grupo de investigación: GIEPRONAL

Fundamentos del cálculo vectorial con algunas aplicaciones

Autores:
Mag. Randy Zabaleta M.
PhD. Luis R. Fuentes C.
PhD. Jeinny M. Peralta P.

Grupo de Investigación: GIEPRONAL

515.15 **Z12**	Zabaleta Mesino, Randy Fundamentos del cálculo vectorial con algunas aplicaciones /Randy Zabaleta M, Luis R. Fuentes C., Jeinny M. Peralta P.-- [1.a. ed.]. Bogotá: Sello Editorial UNAD /2022. (Grupo de investigación GIEPRONAL) ISBN: 978-958-651-850-5 e-ISBN: 978-958-651-848-2 1. Cálculo vectorial 2. Geometría del espacio 3. Curvas en el espacio 4. Movimiento en el espacio 5. Algebra lineal I. Zabaleta Mesino, Randy II. Fuentes Castilla, Luis R. III. Peralta Polo, Jeinny María.

ISBN: 978-958-651-850-5
e-ISBN: 978-958-651-848-2
Escuela de Ciencias Básicas Tecnología e Ingeniería - ECBTI

Sello Editorial UNAD
Universidad Nacional Abierta y a Distancia
Calle 14 sur No. 14-23
Bogotá, D.C.

Noviembre de 2022

Corrección de textos: Johana Patricia Mariño Quimbayo
Diagramación: Natalia Herrera Farfán
Edición integral: Hipertexto SAS

CONTENIDO

RESEÑA DEL LIBRO

El presente texto está dirigido a estudiantes de los programas de Ingeniería y áreas afines de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD) y otras universidades. Contiene el material básico para un curso de Introducción al Álgebra Lineal y elementos del Cálculo Vectorial; surge como propuesta didáctica que propicia la autonomía del aprendizaje en el estudiante, el cual le brinda las herramientas conceptuales, junto con las soluciones detalladas de ejercicios y problemas involucrando conceptos previos fundamentales vistos en los cursos de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. Como propuesta, queremos que el estudiante no detenga su proceso de aprendizaje por vacíos u obstáculos conceptuales, los cuales posiblemente haya olvidado. Al movilizar todos los conocimientos a través del ejemplo bien detallado, garantizamos una madurez conceptual en las construcciones que se proyectan en los cursos de Álgebra Lineal y Cálculo Vectorial, propuesta que se ha construido con la participación de las redes de tutores en los últimos años en la Escuela de Ciencias Básicas, Tecnología e Ingeniería de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD).

El énfasis de este libro se centra en la formalización de algunos conceptos estudiados en un curso de introducción al Álgebra Lineal y un curso de Cálculo Vectorial, es decir, en el estudio de vectores y sus varios conceptos relacionados. El lector puede comprobar que existen varias aplicaciones y que la exposición cubre principalmente el desarrollo matemático y la solución de problemas en forma completa.

El objetivo, ya que después de abordar este libro, el estudiante pueda continuar con facilidad con los cursos propios de su carrera, teniendo como elementos básicos los conceptos teóricos aquí desarrollados.

En particular, se incluye un capítulo sobre el espacio, vectores, cuyo uso y aplicación es frecuente. También, se incluye un capítulo sobre funciones vectoriales y curvas en el espacio, para después abordar en el siguiente capítulo todo lo relacionado a límite, continuidad y diferenciabilidad de funciones de varias variables.

Al final de cada capítulo el lector encontrará una lista de ejercicios. La mayoría de estos ejercicios son de tipo mecánico y muy sencillos. En el interior de cada capítulo, encuentra ejemplos expuestos, los cuales son explicados detalladamente. Estos ejemplos son tomados de libros clásicos que se encuentran en la extensa literatura existente, con algunas modificaciones.

La presentación de este texto es de gran utilidad al estudiante con poco tiempo para hacer lectura de párrafos completos y quien solo busca una definición, un resultado, un ejemplo, un ejercicio, o tal vez orientación breve acerca de un concepto. Al final del texto, aparece una lista de referencias bibliográficas que me permito sugerir al lector consultar para profundizar y a veces precisar en determinados temas. Algunos de estos textos no han sido mencionados explícitamente, pero aparecen en la lista por que en algún momento han sido inspiración en la elaboración de este texto.

Agradecemos sinceramente a todas aquellas personas, estudiantes y profesores, quienes, a través de sus comentarios y sugerencias han contribuido al mejoramiento de este texto. Cualquier corrección o comentario acerca de este trabajo será muy bien recibido en el correo electrónico que aparece abajo.

Por último, nos parece importante mencionar que este texto ha sido posible en gran medida al excelente ambiente de trabajo, y de libertad académica que hemos tenido la bendición de encontrar en la Escuela de Ciencias Básicas y Tecnología de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia. Gracias a todos por su confianza y apoyo.

Randy Zabaleta Mesino
Agosto 2021
Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD)

RESEÑA DE LOS AUTORES

Randy Zabaleta Mesino. Matemático, Magíster en Matemáticas de la Universidad de Cartagena (Cartagena - Colombia) y estudiante de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño (UAN, Bogotá-Colombia), docente de la Escuela de Ciencias Básicas, Tecnología e Ingeniería (ECBTI) de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD-Colombia).

Luis R. Fuentes Castilla. Matemático de la Universidad de Cartagena (Cartagena-Colombia), Magíster en Matemáticas y Doctor en Matemáticas de la Universidad de Puerto Rico (Mayagüez- Puerto Rico), docente de la Escuela de Ciencias Básicas, Tecnología e Ingeniería (ECBTI) de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD-Colombia).

Jeinny María Peralta Polo. Matemática de la Universidad del Atlántico, con Maestría y Doctorado en Ciencias de la Computación y Matemática de la Computacional de la Universidad de São Paulo (Brasil). Docente tiempo completo ocasional de la Escuela de Ciencias Básicas, Tecnología e Ingeniería (ECBTI) de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD-Colombia).

Dedicado a
mis hijos José Raúl y Sara Li Zabaleta Ruíz
y mi esposa Gregoria Ruíz Manjarrez.

A la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD),
la Escuela de Ciencias Básicas e Ingeniería (ECBTI)
y a los colegas la PhD. Jeinny Peralta y el PhD. Luis Fuentes
por su contribución en la construcción de esta obra.

AGRADECIMIENTOS

¡Muchas gracias en primer lugar a Dios que nos ha permitido haber realizado esta contribución a la comunidad académica, a mi familia por contar siempre con ustedes, a la Universidad Nacional Abierta y a Distancia por la financiación de esta obra!

INTRODUCCIÓN

Los cursos Álgebra Lineal y Cálculo Vectorial son vistos por los estudiantes como cursos de alta complejidad y de un nivel considerable de exigencia, por esta razón, en este libro se ha recopilado información básica que un estudiante promedio debe adquirir en el curso de Cálculo Vectorial. La metodología es bastante sencilla, puesto que consiste en el desarrollo de teoría y ejemplos muy detallados.

La elaboración de este libro lleva intrínseco el objetivo de que el estudiante lector que vaya a enfrentarse al curso de Introducción al Álgebra Lineal y al curso de Cálculo Vectorial, sobre todo por primera ocasión, tenga una idea previa y clara sobre los temas que se desarrollarán a lo largo del curso, además tenga un conocimiento práctico y concreto.

1

CAPÍTULO 1

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

En este apartado, se presenta el concepto de vector junto con las operaciones definidas en el espacio *n*-dimensional para la construcción de elementos matemáticos como rectas y planos, necesarios para abordar las temáticas y su relación entre ellos.

1.1. VECTORES Y GEOMETRÍA DEL ESPACIO

La noción de vector *n*-dimensional se dará mostrando ejemplos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$; además se presentará la norma de un vector, el punto medio en el eje real, las operaciones entre vectores y relaciones entre ellos.

1.1.1 PUNTOS, VECTORES Y NORMA DE UN VECTOR

Definición 1.1. (Punto o vector). A los elementos del conjunto de las n-uplas ordenadas de números reales, $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,...,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}$ "para todo " $i = 1,2,...,n.\}$, los llamaremos punto o vector de dimensión *n*.

Definición 1.2. (Norma y dirección). Un vector posee norma y dirección. La norma hace referencia a la magnitud del vector, mientras que la dirección se refiere al ángulo que forma este respecto a un plano o eje de referencia.

Así, si tenemos un vector v de la forma $v=(v_1,v_2,v_{3,}...,v_n)$ podemos calcular su norma aplicando la siguiente fórmula matemática:

$$|V| = \sqrt{v_1^2 \quad v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2} \qquad (1.1)$$

Concluimos que, la norma de un vector siempre es un escalar positivo.

Nota 1.1. La norma de un vector v se denota $|v|$.

Ejemplo 1.1. Encuentre la norma de los siguientes vectores:

$$A = (-1,1,4);\ B = (3,-4);\ C = (\frac{1}{2},2,1);\ D = (\cos(x), sin(x))$$

Solución: aplicando la fórmula de la norma, dada en (1.1), podemos obtener fácilmente la norma de los vectores dados.

$$|A| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$|B| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25}$$

$$|C| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$|D| = \sqrt{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2} = \sqrt{1} = 1$$

Definición 1.3. (Distancia). Si x e y son dos puntos cualesquiera sobre la recta real, se define la distancia de x , y por:

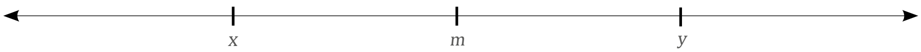
$$d(x,y) = |x\text{-}y| \qquad (1.2)$$

Ejemplo 1.2. Dados dos puntos cualesquiera x e y sobre una recta real, muestre que la coordenada del punto medio entre x e y está dada por:

$$m = \frac{x+y}{2} \qquad (1.3)$$

Solución: para solucionar este problema, dibujemos primero nuestra recta real con los puntos x, y y m (punto medio entre x e y) respectivamente, vea Fig. 1.1.

Figura 1.1 Punto medio



Fuente: Elaboración propia

De aquí, sabemos que $x < m < y$ por tanto $x - m < 0$ y $m - y < 0$

Luego, por definición de valor absoluto, sabemos que $|x| = x$ si $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$, así, usando esta definición y la ecuación (1.2) obtenemos que:

$$d(x,m) = |x - m| = -(x-m)$$

y (1.4)

$$d(m,y) = |m - y| = -(m-y)$$

Para que m sea punto medio, debemos tener que $d(x,m) = d(m,y)$, de las ecuaciones en (1.4), tenemos que:

$-(x\text{-}m) = -(m - y)$

$x - m = m - y$

$x + y = m + m$

$x + y = 2m$

$$m = \frac{x + y}{2} \qquad (1.5)$$

Queda entonces probada la fórmula para la coordenada del punto medio en una dimensión.

Análogamente podemos obtener las coordenadas para el punto medio en dos dimensiones ($\mathbb{R}^2$), quedando de la siguiente forma:

$$m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \qquad (1.6)$$

1.1.2. EJERCICIOS

1. Calcule la norma de los siguientes vectores en $\mathbb{R}^2$: A = (2,1), B = (3,4) y C=(1,$\tan^2(x)$).

2. Calcule la norma de los siguientes vectores en $\mathbb{R}^3$: A=(1,2,3), B=(4,1,5) y C=(9,2$\sqrt{2}$,1).

3. Un vector geométrico V es aquel que se forma a partir de dos puntos A y B en el plano o en el espacio, denotado por $V=\overrightarrow{AB}$. Si A = $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ y $B=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, entonces la norma del vector $\overrightarrow{AB}$ está dada por $|AB|=\sqrt{(b_1 a_1)^2+(b_2-a_1)^2+\ldots+(b_n-a_n)^2}$. Calcular la norma de los siguientes vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$:

   a. A=(1,2) y B=(1,4)

   b. A=(4,8) y B=(2,4)

   c. A=(3,4,5) y B=(1,2,3)

   d. A=(7,4,3) y B=(6,5,4)

5. Dado los siguientes puntos $A=(1,2)$, $B=(3,6)$, $C=(5,2)$ y $D=(7,8)$. Determinar el punto medio de: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$.

6. Si la coordenada del punto medio del vector v= $\overrightarrow{AB}$ está dada por M=(4,3) y el punto B por B=(7,5), determine las coordenadas del punto A.

1.2. OPERACIONES EN EL ESPACIO *n*-DIMENSIONAL $\mathbb{R}^n$

Recordemos que el espacio n-dimensional es aquel que se encuentra formado por todas las n-uplas de números reales los cuales se denotan por $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$, siendo los a_i,i = 1,2,3,...,n las componentes del vector A.

Definición 1.4. (Igualdad de vectores). Dos vectores A y B de $\mathbb{R}^n$ son iguales si y solo si sus componentes correspondientes son iguales. Esto es, si $A=(a_1,a_2,a_3,\dots a_n)$ y $B = (b_1,b_2,b_3,\dots,b_n)$, entonces:

$$A = B \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_n = b_n \qquad (1.7)$$

Definición 1.5. (Suma de vectores). La suma de dos vectores A y B de $\mathbb{R}^n$ se obtiene al sumar las componentes correspondientes, esto es:

$$A+B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n) \qquad (1.8)$$

Definición 1.6. (Múltiplo escalar). Si k es un escalar real y A un vector de R^n, definimos el múltiplo escalar kA como:

$$kA = (ka_1,ka_2,ka_3,\dots,ka_n) \qquad (1.9)$$

Ejemplo 1.3. Dados los vectores A = (2,-1), B = (3,4) y C = (-3,0), determine los valores de x e y que satisfacen la ecuación vectorial $xA + yB = C$.

Solución: si $xA + yB = C$ donde x e y son escalares reales, se tiene que:

$$x(2,-1) + y(3,4) = (-3,0)$$

$$(2x, -x) + (3y, 4y) = (-3,0)$$

$(2x+3y, -x+4y) = (-3,0)$

Luego, por igualdad de vectores se tiene que $2x + 3y = -3y - x + 4y = 0$. Ahora, despejando x en la segunda componente del vector, se tiene $x = 4y$. Sustituyendo esta expresión en la primera componente, se tiene:

$$2(4y) + 3y = -3$$

$$8y + 3y = -3$$

$$11y = -3$$

$$y = -\frac{3}{11} \tag{1.10}$$

Por último, reemplazando el valor obtenido en (1.10) de y en cualquiera de las dos ecuaciones se obtendrá el valor de x, así:

$$-x + 4\left(-\frac{3}{11}\right) = 0$$

$$-x - \frac{12}{11} = 0$$

$$x = -\frac{12}{11} \tag{1.11}$$

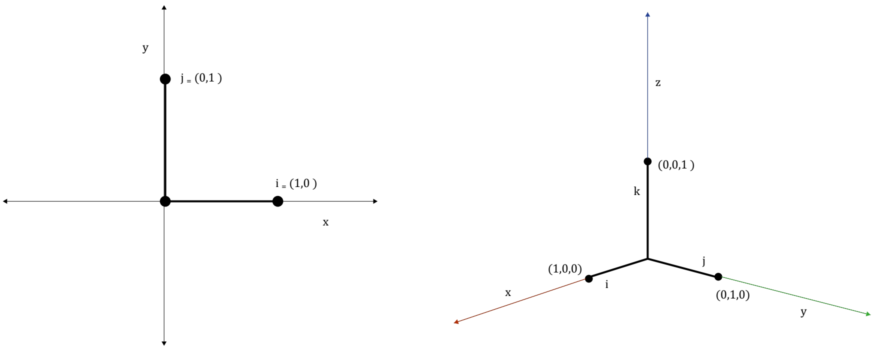
Los valores dados en (1.10) y (1.11) constituyen los valores que se querían determinar.

1.2.1 VECTORES UNITARIOS

Definición 1.7. (Vector unitario). Un vector unitario es aquel que tiene longitud 1.

En $\mathbb{R}^2$, los vectores $\hat{i}=(1,0)$ y $\hat{j}=(0,1)$ son vectores unitarios. En $\mathbb{R}^3$, los vectores $\hat{i}=(1,0,0)$, $\hat{j}=(0,1,0)$, $\hat{j}=(0,0,1)$, también son vectores unitarios, ver Figura 1.2.

Figura 1.2 Vectores unitarios



Fuente: Elaboración propia

Si $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces se puede escribir como $A = a_1\hat{\mathrm{i}} + a_2\,\hat{\mathbf{j}} + a_3\,\hat{\mathrm{k}}$; análogamente si $A \in \mathbb{R}^2$, entonces $A = a_1\hat{\mathrm{i}} + a_2\,\hat{\mathbf{j}}$.

Definición 1.8. (Vector normalizado). Un vector $\vec{u}$ normalizado de un vector A, es un vector unitario, que tiene la misma dirección de A y viene dado por:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{A}{|A|} \tag{1.12}$$

Ejemplo 1.4. Encuentre el vector normalizado en la dirección de los siguientes vectores:

- $A = (3,-4)$
- $B = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 2)$

Solución:

- Para solucionar este ejercicio, vamos a comenzar estableciendo la norma del vector, así:

$$|A| = \sqrt{(3^2 + (-4)^2\,)}$$

$$|A| = \sqrt{(9+16)}$$

$$|A| = \sqrt{25}$$

$$|A| = 5 \tag{1.13}$$

- Ahora, haciendo uso de la fórmula (1.12) presentada en la Definición 1.8, procedemos a multiplicar el vector por $\frac{1}{|\vec{u}|}$. Sea $\vec{u}$ el vector normalizado en la dirección de A, se tiene que:

$$\vec{\mathbf{u}} = \frac{(3,-4)}{5}$$

$$\vec{\mathbf{u}} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) \qquad (1.13)$$

- Igual que en el ejercicio anterior, comenzamos estableciendo la norma del vector. Así, tenemos entonces:

$$|B| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 2^2}$$

$$|B| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + 4}$$

$$|B| = \frac{\sqrt{69}}{4} \qquad (1.15)$$

- Nuevamente, haciendo uso de la fórmula presentada en la Definición (1.8) de vector normalizado procedemos a multiplicar el vector por $\frac{1}{|B|}$. Sea $\vec{v}$ el vector normalizado en la dirección de B, se tiene que:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{69}}{4}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 2\right)$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \left(\frac{2}{\sqrt{69}}, -\frac{1}{\sqrt{69}}, \frac{8}{\sqrt{69}}\right) \qquad (1.16)$$

1.2.2. PRODUCTO ESCALAR ENTRE VECTORES

Definición 1.9. (Producto escalar). Si $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$

son vectores de $\mathbb{R}^n$, su producto escalar (o producto punto) se define como:

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k \in \mathbb{R} \qquad (1.17)$$

Teorema 1.1. Para los vectores A,B,C$\in\mathbb{R}^n$ y el escalar $\alpha\in\mathbb{R}$ se tienen las siguientes propiedades:

- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot c$

- $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$
- $A \cdot A = A \cdot B = A \cdot C = 0 \Leftrightarrow A = \overrightarrow{0}$

Teorema 1.2. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Si A y B son vectores de R^n entonces $(A \cdot B)^2 \leq (A \cdot A)(B \cdot B)$, es decir, $(A \cdot B)^2 \leq |A|^2\,|B|^2$.

Nota 1.2. $A \cdot A = |A|^2$, para todo $A \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.5. Sean $A = (1,-1,1)$, $B = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ y $C = (-2,5,7)$ vectores de $\mathbb{R}^3$, calcule los siguientes productos puntos: $A \cdot B$, $A \cdot C$ y $B \cdot C$.

Solución: atendiendo a la definición de producto punto o producto escalar de vectores se tiene que:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (1,-1,1) \cdot \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \\ A \cdot B &= \tfrac{7}{8}.,k \\ B \cdot C &= \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}\right) \cdot (-2,5,7) \\ &= -1 - \tfrac{5}{4} + \tfrac{7}{8} \\ B \cdot C &= -\tfrac{11}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot C &= (1,-1,1) \cdot (-2,5,7) \\ &= -2 - 5 + 7 \\ A \cdot C &= 0 \end{aligned}$$

1.2.3. EJERCICIOS

1. Considere los vectores $A = (3,-2,1)$, $B = \left(2, \frac{2}{5}, -1\right)$ y $C = \left(\frac{3}{2}, 0, -2\right)$ en $\mathbb{R}^3$. Realice las siguientes operaciones entre vectores.

   a. $A \cdot (B\text{-}C)$

   b. $3B - \frac{4}{3}A$

   c. $(A - B) \cdot (C - B)$

2. Determine los vectores unitarios de los siguientes vectores en la respectiva dirección indicada.

   c. $A = (-3,3,1)$, en la dirección de A.

   d. $B = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{3}\hat{\mathbf{k}}$, en la dirección contraria de B.

   e. $C = (2\sin(\theta)\sin(\phi), 2\cos(\theta)\sin(\phi, 2\cos(\phi))$, en la dirección de C.

3. Dos vectores A y B se dice que son perpendiculares, si su producto punto es cero (A · B = 0). Determine si los siguientes pares de vectores son perpendiculares.

   a. $A = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{j} + \sqrt{3}\hat{\mathbf{k}}$ y $B = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$

   b. $C = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$ y $D = \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, 3\right)$

4. Determine los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$, tal que:

$$3(x, -2,3) - 4(1, y, 2) + 2(2,1,z) = (2,4,6)$$

5. Demuestre que si A es un vector en $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$|A| = \left((A \cdot A)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.18}$$

1.3 PROYECCIONES Y ÁNGULOS ENTRE VECTORES EN $\mathbb{R}^n$

Definición 1.10. (Ángulo entre vectores). El ángulo θ entre dos vectores A y B está dado por la fórmula:

$$A \cdot B = |A||B|\cos(\theta) \tag{1.19}$$

El ángulo entre dos vectores se obtiene al despejar θ de la ecuación en la definición 1.10, la cual define el producto punto o escalar de dos vectores en función de la magnitud de dichos vectores y el ángulo de separación entre ellos.

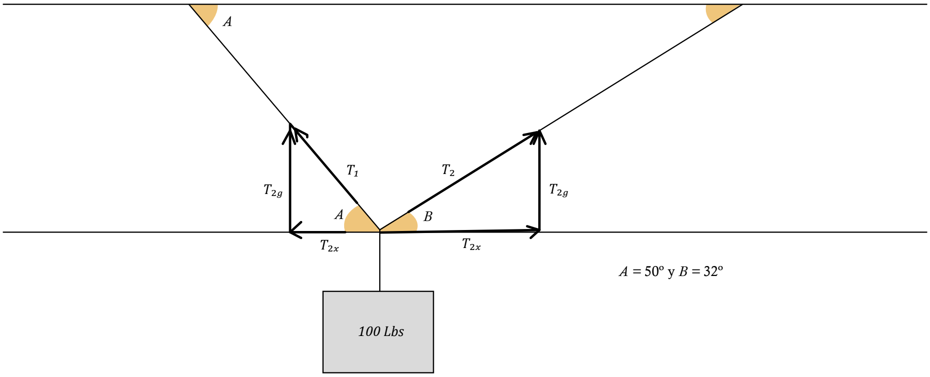
$$\theta = \arccos\left(\frac{A \cdot B}{|A||B|}\right) \tag{1.20}$$

Un vector A puede ser escrito en función de su magnitud, $|A|$, y el ángulo que forma con el eje horizontal x, α, como:

$$A = (|A|\cos\alpha, |A| \sin\alpha) \tag{1.21}$$

Ejemplo 1.6. Una pesa de 100 lb cuelga de dos alambres como se muestra en la Figura 1.3. Encuentre las tensiones T_1 y T_2 en ambos alambres y sus respectivas magnitudes.

Figura 1.3 Representación del Ejemplo 1.6.



Fuente: Stewart (2012)
Elaboración propia

Solución: descomponiendo vectorialmente las tensiones en los alambres se tiene que:

$$T_1 = -T_{1x}\hat{\mathrm{i}} + T_{1y}\hat{\mathbf{j}} \text{ y } T_2 = T_{2x}\hat{\mathrm{i}} + T_{2y}\,\hat{\mathbf{j}} \tag{1.22}$$

$$T_1 = (-T_{1x}, T_{1y}), \text{ y } T_{2\,=\,(T2x, T2y\ )} \tag{1.23}$$

En donde se considera positivo hacia la derecha para el eje de referencia horizontal y positivo hacia arriba para el eje de referencia vertical.

Además, también descomponemos vectorialmente el peso de la carga.

$$\mathrm{W} = -100\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathrm{W} = (0,-100)$$

$$\mathrm{W} = -(0,100) \tag{1.24}$$

Ahora, procedemos a encontrar los valores de las componentes vectoriales en función de su magnitud y en la dirección del vector unitario dado por el ángulo correspondiente.

$$-T_1 x = -|T_1|\cos(50^\circ)$$

$-T_1\,y = |T_1\,|\sin\,(50^{\circ})$

$-T_2 x = |T_2\,|\cos\,(32^{\circ})$

$$-T_2\,y = |T_2\,|\sin\,(32^{\circ}) \qquad (1.25)$$

Teniendo estas equivalencias, procedemos a realizar la suma vectorial de las tensiones en los alambres y el peso de la carga teniendo en cuenta la condición de equilibrio en el punto de convergencia de las fuerzas. Así, para lograr la condición de equilibrio, la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el punto de convergencia debe ser igual a 0, entonces:

$T_1 + T_2 + W = 0$

$(-T_1\,x, T_1\,y) + (T_2\,x, T_2\,y) - (0{,}100) = (0{,}0)$

$(-|T_1|\cos(50^{\circ}\,), |T_1|\sin\,(50^{\circ})) + (|T_2\,|\cos(32^{\circ}\,), |T^1\,|\sin\,(32^{\circ})) = (0{,}100)$

$$(-|T_1|\cos(50^{\circ}\,) + |T_1\,|\cos(32^{\circ}), |T_2\,|\sin(50^{\circ}\,) + |T_1|\sin\,(32^{\circ}\,)) = (0{,}100) \qquad (1.26)$$

Así, en (1.26) hemos llegado a una igualdad de dos vectores y para que dos vectores sean iguales, necesariamente sus componentes deben ser iguales. De ahí se tiene que:

$-|T_1\,|\cos(50^{\circ}\,) + |T_2|\cos\,(32^{\circ}) = 0$

$$|T_1\,|\sin\,(50^{\circ}\,) + |T_2\,|\sin(32^{\circ}\,) = 100 \qquad (1.27)$$

Para resolver este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\|T_1\|$ y $\|T_2\|$ podemos aplicar la técnica de sustitución, de manera que despejando $\|T_1\|$ de la primera ecuación del paso anterior se tiene: $|T_1\,| = \frac{|T_2|\cos\,(32^{\circ})}{\cos\,(50^{\circ})}$

Ahora, sustituyendo el valor hallado de $\|T_1\|$ en la segunda ecuación del paso anterior) se tiene:

$$\frac{|T_2|\cos\,(32^{o})}{\cos\,(50^{o})}\sin(50^{\circ}) + |T_2|\sin(32^{\circ}) = 100$$

$1.01|T_2\,|+0.53|T_2\,|=100$

$1.54|T_2\,|=100$

$$|T_2| = \frac{100}{1.54}$$

$$|T_2| = 64.93\ lb \tag{1.28}$$

Por último, reemplazando el valor obtenido de $\|T_2\|$ se obtiene el valor de $\|T_1\|$.

$$|T_1| = \frac{|T_1|\cos(32^\circ)}{\cos(50^\circ)}$$

$$|T_1| = \frac{64.93\cos(32^\circ)}{\cos(50^\circ)}$$

$$|T_1| = 85.66\ lb \tag{1.29}$$

Ejemplo 1.7. Sea θ el ángulo que forman los siguientes vectores de $\mathbb{R}^n$ A=(1,1,1,...,1) y B = (1,2,3,...,n). Hallar el valor límite de θ cuando n → ∞.

Solución: para solucionar este problema aplicaremos la fórmula de ángulo entre dos vectores (1.20), puesto que lo que nos interesa es un ángulo entre estos dos vectores, entonces se tiene:

$$\theta = \arccos\left(\frac{A \cdot B}{|A||B|}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{(1,1,1,\ldots,1) \cdot (1,2,3,\ldots,n)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+\quad+1^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+3^2+\quad+n^2}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+\ldots+1^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{1+1+1+\ldots+1} \cdot \sqrt{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}}\right) \tag{1.30}$$

Ahora bien, la expresión que se encuentra en el numerador de la fracción en (1.30) corresponde a la sumatoria de los n primeros números, que se define como:

$$1+2+3+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} \tag{1.31}$$

Abajo, en el denominador de la fracción en (1.30), la expresión que se encuentra dentro de la primera raíz cuadrada corresponde a la sumatoria de 1 n veces, la cual se define como 1+1+1+...+1 = $\sum_{k=}^{n} 1 = n$. En la otra raíz cuadrada se tiene la sumatoria de los n primeros números al cuadrado, que se define como:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6} \qquad (1.32)$$

Reemplazando cada sumatoria por su correspondiente equivalencia en términos del n-ésimo número en (1.30) se tiene:

$$\theta=\arccos\left(\frac{\frac{n^2+n}{2}}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{2n^3+3n^2+n}{6}}}\right)$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{\frac{n^2+n}{2}}{\sqrt{\frac{n(2n^3+3n^2+n)}{6}}}\right)$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{\frac{n^2+n}{2}}{\sqrt{\frac{2n^4+3n^3+n^2}{6}}}\right)$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{\frac{n^2+n}{2}}{\frac{\sqrt{2n^4+3n^3+n^2}}{\sqrt{6}}}\right)$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{\sqrt{6}(n^2+n)}{2\sqrt{2n^4+3n^3+n^2}}\right)$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{n^2+n}{\sqrt{2n^4+3n^3+n^2}}\right) \qquad (1.33)$$

Sabiendo que $n^2+n=n^2+n=\sqrt{(n^2+n)^2}$ en (1.33) se tiene, entonces:

$$\theta=\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{\sqrt{(n^2+n)^2}}{\sqrt{2n^4+3n^3+n^2}}\right)$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{(n^2+n)^2}{2n^4+3n^3+n^2}}\right)$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{n^4+2n^3+n^2}{2n^4+3n^3+n^2}}\right) \qquad (1.34)$$

Llegados a esta expresión en (1.34) aplicaremos el límite cuando $n\to\infty$, puesto que lo que nos interesa es el ángulo entre estos dos vectores según dicho límite.

Se tiene entonces:

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{n^4+2n^3+n^2}{2n^4+3n^3+n^2}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{n^4+2n^3+n^2}{2n^4+3n^3+n^2}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^4+2n^3+n^2}{2n^4+3n^3+n^2}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3+n^2}{2n^4+3n^3+n^2}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{\frac{n^4}{n^4}+\frac{2n^3}{n^4}+\frac{n^2}{n^4}}{\frac{2n^4}{n^4}+\frac{3n^3}{n^4}+\frac{n^2}{n^4}}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{1+0+0}{2+0+0}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\theta = 30^{\circ} = \frac{\pi}{6} \tag{1.35}$$

Definición 1.11. (Ortogonalidad entre vectores). Dos vectores $A, B \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales (perpendiculares), si el ángulo formado entre ellos es 90°. Dos vectores son ortogonales si el producto punto entre ellos es cero.

Observe A y $B \in \mathbb{R}^2$ siendo dos vectores ortogonales en la Figura 1.4.

Considere $A, B \in \mathbb{R}^2$ dos vectores, entonces:

$$|A+B|^2 = (A+B)\cdot(A+B)$$

$$|A+B|^2 = (A+B)\cdot A + (A+B)\cdot B$$

$$|A+B|^2 = A\cdot A + A\cdot B + A\cdot B + B\cdot B$$

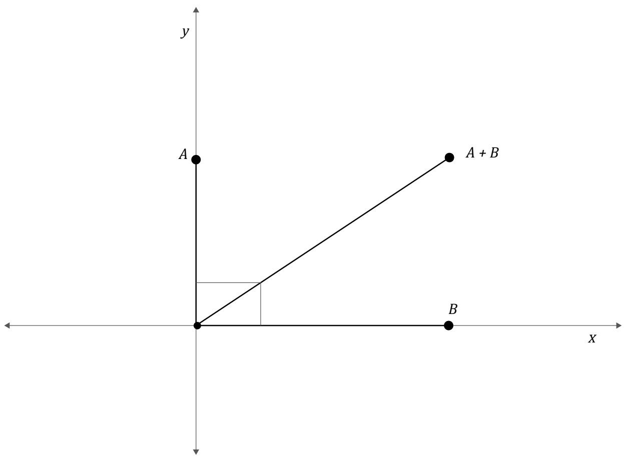
$$|A+B|^2 = |A|^2 + 2A\cdot B + |B|^2 \tag{1.36}$$

Por otro lado, para un triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras tenemos que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos, es decir:

$$|A+B|^2 = |A|^2 + |B|^2 \tag{1.37}$$

Comparando las dos anteriores ecuaciones (1.36) y (1.37) se concluye que, cuando A y B son ortogonales, entonces: $2A \cdot B = 0 \Rightarrow A \cdot B = 0$.

Figura 1.4 A y B vectores ortogonales



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 1.8. Hallar todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que tienen la misma magnitud del vector $A = (-5,4)$ y le son ortogonales.

Solución: como los vectores a encontrar deben ser ortogonales a A, su producto escalar debe ser igual a cero. Sea $B = (a,b)$ el vector ortogonal y de igual magnitud que A, entonces $A \cdot B = 0$, es decir:

$$(-5,4) \cdot (a, b) = 0$$

$$-5a + 4b = 0$$

$$5a = 4b$$

$$a = \frac{4b}{5} \tag{1.38}$$

Ahora bien, como A y B deben tener igual magnitud, entonces |A| = |B|. De esto se tiene que:

$$\sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{25 + 16} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{41} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$41 = a^2 + b^2 \tag{1.39}$$

Ahora, reemplazamos el valor de a obtenido al efectuar el producto escalar entre *A* y *B*, de manera que nos queda lo siguiente:

$$41 = \left(\frac{4b}{5}\right)^2 + b^2$$

$$41 = \frac{16b^2}{25} + b^2$$

$$41 = \frac{41b^2}{25}$$

$$25 = b^2$$

$$b = \sqrt{25}$$

$$b = 5 \ \vee \ b = -5 \tag{1.40}$$

Sustituyendo los valores hallados de *b*, se tiene que $a = \frac{4(5)}{5} = 4 \vee a = \frac{4(-5)}{5} = -4$. De manera que los vectores que tienen igual magnitud que A y al mismo tiempo le son ortogonales corresponden a $B_1 = (4,5)$ y $B_2 = (-4,-5)$.

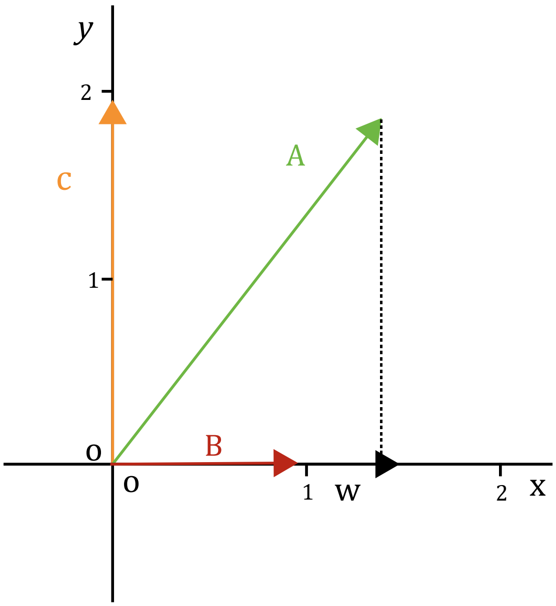
Definición 1.12. (Proyección). Consideremos $A, B \in \mathbb{R}^n$, siendo $A = C + W$ y $W = tB$. Se define W como la proyección de A sobre B y se denota de la siguiente forma:

$$W = \text{proy}_B A = tB \tag{1.41}$$

Sabiendo que A = C + W, si sustituimos el valor de W, obtenemos $A = C + tB$. Al multiplicar escalarmente por B ambos lados de la ecuación nos quedan $A \cdot B = (C + tB) \cdot B$. Partiendo de esto, tenemos que:

$$A \cdot B = C \cdot B + tB \cdot B \quad (1.42)$$

Figura 1.5 Proyección de *A* sobre *B*.



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 1.5 se observa que C y B son ortogonales por lo tanto el producto escalar $C \cdot B = 0$, por lo que:

$$A \cdot B = tB \cdot B \quad (1.43)$$

Despejando t de esta ecuación se tiene:

$$t = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} \quad (1.44)$$

Por último, sustituyendo t en $W = proy_B\, A = tB$ se tiene que:

$$W = \mathrm{proy}_B A = \left(\frac{A \cdot B}{B \cdot B}\right) B \quad (1.45)$$

Análogamente, se define C como la proyección ortogonal de A sobre B, que se denota:

$$C = proy_{\perp B} A \quad (1.46)$$

Sabemos que $A = C + W$, entonces $C = A - W$. Además, $W = proy_B A$, por lo que:

$$C = proy_{\perp B} A = A - proy\ BA \qquad (1.47)$$

Ejemplo 1.9. Sean $A = (2,-1,0)$ y $B = (1,3,2)$ vectores de $\mathbb{R}^3$, determinar el vector $proy_{\perp B} A$ y mostrar que dicho vector es ortogonal a B.

Solución: para solucionar este problema debemos primero hallar el vector $proy_B A$ porque recordemos que el vector $\text{proy}_{\perp B} A$ se define como $proy_{\perp B} A = A - proy_B A$. Así, si ya conocemos el vector A solo nos falta hallar el vector $proy_B A$ y realizar la debida resta.

$$\text{proy}_B A = \left(\frac{A \cdot B}{B \cdot B}\right) B = \left(\frac{(2,-1,0) \cdot (1,3,2)}{(1,3,2) \cdot (1,3,2)}\right) (1,3,2)$$

$$\text{proy}_B A = \left(\frac{2 - 3 + 0}{1 + 9 + 4}\right) (1,3,2)$$

$$\text{proy}_B A = \left(-\frac{1}{14}\right) (1,3,2)$$

$$\text{proy}_B A = \left(-\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, -\frac{1}{7}\right) \qquad (1.48)$$

Ahora que hemos hallado el vector $proy_B A$, podemos determinar fácilmente el vector $proy_{\perp B} A$ aplicando la fórmula correspondiente. Así se tiene:

$$\text{proy}_{\perp B} A = A - \text{proy}_B A = (2,-1,0) - \left(-\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, -\frac{1}{7}\right)$$

$$\text{proy}_{\perp B} A == \left(2 + \frac{1}{14}, -1 + \frac{3}{14}, 0 + \frac{1}{7}\right)$$

$$\text{proy}_{\perp B} A == \left(\frac{29}{14}, -\frac{11}{14}, \frac{1}{7}\right)$$

$$\text{proy}_{\perp B} A == \left(\frac{29}{14}, -\frac{11}{14}, \frac{1}{7}\right) \qquad (1.49)$$

Ahora, para probar que el vector $proy_{\perp B} A$ es ortogonal al vector B, realizamos el producto punto entre estos dos vectores y constatamos que nos dé 0, así estos dos vectores serán mutuamente ortogonales.

$$B \cdot \text{proy}_{\perp B} A = 0$$

$$(1,3,2) \cdot \left(\frac{29}{14}, -\frac{11}{14}, \frac{1}{7}\right) = 0$$

$$\frac{29}{14} - \frac{33}{14} + \frac{2}{7} = 0$$

$$0 = 0$$

Luego, B y $\text{proy}_{\perp B} A$ son mutuamente ortogonales.

1.3.1. EJERCICIOS

1. Considere los puntos en $\mathbb{R}^3$, A = (-2,1,-1); B = (3,0,-2) y C = (-1,-2,5). Determine la medida de los ángulos del triángulo formado por estos 3 puntos.

2. Sean X, Y ∈ $\mathbb{R}^n$ no nulos y α ∈ $\mathbb{R}$, entonces muestre que:

$$X \cdot (Y - \alpha X) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \frac{X \cdot Y}{Y \cdot Y}$$

3. Determine la proyección del vector A = (-5, 2, -1) sobre cada uno de los siguientes vectores.

   a. B = (1,3,2)

   b. C = (2,0,1)

   c. D = $D = \hat{\boldsymbol{j}}$

4. Determine todos los vectores en el plano $\mathbb{R}^2$ perpendiculares a A = $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y poseen la misma magnitud que A.

1.4. PRODUCTO CRUZ ENTRE VECTORES DE $\mathbb{R}^n$

Definición 1.13. (Producto cruz). Dados $A = (a_1,a_2,a_3)$ y $B = (b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3$, se define el producto cruz entre estos dos vectores como:

$$A \times B = C = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (1.50)$$

$$A \times B = C = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{\boldsymbol{i}} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\hat{\boldsymbol{j}} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{\boldsymbol{k}} \quad (1.51)$$

$$A \times B = C = (a_2 b_3 - a_3 b_2, -a_1 b_3 + a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad (1.52)$$

El producto cruz de dos vectores A y B en (1.50) genera un vector C que es ortogonal tanto a A como a B.

Ejemplo 1.10. Dados $A = \left(-\frac{1}{2}, 2, 4\right)$ y B = (-1,1,5), determine el producto cruz de estos dos vectores, $A \times B$, y verifique que este vector es ortogonal tanto a A como a B.

Solución 1.10. Para solucionar este problema haremos uso de la *f*órmula anterior en (1.52), de manera que si $A = (a_1, a_2, a_3) = \left(-\frac{1}{2}, 2, 4\right)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ = (-1,1,5), se tiene entonces:

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, - a_1 b_3 + a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$A \times B = \left((2)(5) - (4)(1), -\left(-\frac{1}{2}\right)(5) + 4(-1), \left(-\frac{1}{2}\right)(1) - (2)(-1)\right)$$

$$A \times B = \left(10 - 4, \frac{5}{2} - 4, -\frac{1}{2} + 2\right)$$

$$A \times B = \left(10 - 4, \frac{5}{2} - 4, -\frac{1}{2} + 2\right)$$

$$\mathrm{C} = A \times B = \left(6, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad (1.53)$$

Ahora, para verificar que el vector obtenido, C, es ortogonal a A y B realizaremos los productos puntos correspondientes sabiendo que el resultado debe ser igual a 0.

$$(A \times B) \cdot A = \left(6, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, 2{,}4\right) = -3 - 3 + 6 = 0$$

$$(A \times B) \cdot B = \left(6, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \cdot (-1{,}1{,}5) = -6 - \frac{3}{2} + \frac{15}{2} = 0 \quad (1.54)$$

Luego entonces, el vector C = A × B es ortogonal tanto al vector A como al vector B.

Ejemplo 1.11. Determine el producto vectorial $A \times B$ de los vectores $A = (4,3,7)$ y $B = (8,2,6)$.

Solución: procediendo de igual manera que en la primera parte del ejercicio anterior, siendo $A = (a_1,a_2,a_3) = (4,3,7)$ y $B = (b_1,b_2,b_3) = (8,2,6)$, se tiene que:

$$A \times B = (a_2b_3 - a_3 b_2, - a_1b_3 + a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$A \times B = ((3)(6) - (7)(2), - (4)(6) + 7(8), 4(2) - 3(8))$$

$$A \times B = (18 - 14, -24 + 56, 8 - 24) = (4,32,-16) \tag{1.55}$$

1.4.1. EJERCICIOS

1. Si A, B y C son vectores en $\mathbb{R}^3$. Demuestre o refute (con un contraejemplo) las siguientes propiedades:

   a. $A \times B = B \times A$

   b. $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

   c. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

   d. Si $A \times B = 0$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$, entonces $A \parallel B$

   e. $(\alpha A) \times B = \alpha(A \times B) = A \times (\alpha B)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

   f. $A \times A = |A|$

   g. $|A \times B| = (|A|^2 |B|^2 - (A \cdot B)^2)^{1/2}$

   h. $A \times B \times C = (A \cdot C) B - (A \cdot B)C$

   i. $||A \times B|| = ||A||||B|||| \sin\theta|$

2. Si $A = (-3,4,2)$, $B = (1,-2,2)$ y $C = (6,-8,-4)$. Calcular:

   a. $B \times A$

b. $B \times C$

c. $B \times (A + C)$

d. $A \times C$

e. $A \times B \times C$

3. Comprobar las siguientes igualdades:

$$\hat{\boldsymbol{i}} \times \hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\mathbf{k}} \tag{1.56}$$

$$\hat{\boldsymbol{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\boldsymbol{j}} \tag{1.57}$$

$$\hat{\boldsymbol{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\boldsymbol{i}} \tag{1.58}$$

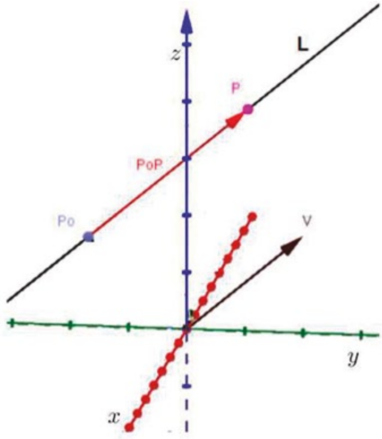
4. Si $A = (-\frac{1}{2}, 3, -2)$, $B = (2, -1, 3)$ y $C = (\frac{3}{2}, -1, 1)$ Calcular $|A \cdot (A \times B)|$ y brinde una interpretación geométrica de este resultado.

1.5 RECTAS EN EL ESPACIO $\mathbb{R}^3$

1.5.1 ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Considere P_o un punto sobre la recta con coordenadas (x_o, y_o, z_o), como se muestra en la Figura 1.6, y P otro punto sobre la recta con coordenadas (x,y,z), $\vec{v}$ el vector director de la recta, cuyas componentes son (a,b,c) y $(\overrightarrow{P_0 P})$ un vector que va en la dirección de la recta y es múltiplo escalar de $\vec{v}$, cuyas componentes inician desde el origen coordenado, son $(x - x_o, y - y_o, z - z_o)$.

Figura 1.6 Recta en el espacio



Fuente: Elaboración propia

Como el vector $(\overrightarrow{P_0P})$ es múltiplo escalar de $\vec{v}$, esto quiere decir que $(\overrightarrow{P_0P}) = t\vec{v}$, siendo t un número escalar real cualquiera que se encarga de dilatar o contraer el vector $\vec{v}$ para convertirlo en $(\overrightarrow{P_0P})$. Entonces, como $\vec{v}=(a,b,c)$, tenemos que: $t\vec{v} = t(a,b,c) = (at,bt,ct)$. Además, sabemos que $(\overrightarrow{P_0P}) = (x - x_o, y - y_o, z - z_o)$.
De lo anterior, podemos plantear la ecuación vectorial de la recta en la siguiente definición.

Definición 1.14. (Ecuación vectorial de la recta). La ecuación vectorial de una recta está dada por $(\overrightarrow{P_0P}) = t\vec{v}$ o equivalentemente:

$$(x - x_o, y - y_o, z - z_o) = (at,bt,ct) \tag{1.59}$$

1.5.2 ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA

En $\mathbb{R}^2$, una recta es simplemente regida por una función lineal de x, por ejemplo $y = x$, donde x es el parámetro. En $\mathbb{R}^3$, es más conveniente obtener las coordenadas de un punto sobre la recta L a partir de un parámetro t (que puede ser el tiempo) que nos revele, por decirlo de alguna manera, las coordenadas de dicho punto. Por ejemplo, si nuestro parámetro t representa el tiempo en segundos, entonces en un tiempo de 1 segundo ($t = 1$) sobre qué punto del espacio se encuentra una partícula que describa un movimiento rectilíneo.

Partiendo de la ecuación vectorial de la recta $(x - x_o, y - y_o, z - z_o) = (at,bt,ct)$, podemos obtener las ecuaciones paramétricas de la recta si aplicamos la igualdad de vectores. Recordemos que para que dos vectores sean iguales, sus componentes deben ser necesariamente iguales. Por tanto, si $(x - x_o, y - y_o, z - z_o)) = (at,bt,ct)$, entonces $x - x_o = at$, $y - y_o = bt$y$z - z_o = ct$.

De lo anterior, podemos plantear las ecuaciones paramétricas de la recta en la siguiente definición.

Definición 1.15. (Ecuaciones paramétricas de la recta). Las ecuaciones paramétricas de una recta sirven para establecer cualquier punto sobre la recta y están dadas por: $x - x_o = at$, $y - y_o = bt$y$z - z_o = ct$.

Nota 1.3. Una misma recta puede tener varias parametrizaciones.

1.5.3 ECUACIONES SIMÉTRICAS DE LA RECTA

Si de cada una de las ecuaciones paramétricas de la recta despejamos el parámetro t, se tiene:

$$t = \frac{x - x_o}{a} \tag{1.60}$$

$$t = \frac{y - y_o}{b} \tag{1.61}$$

$$t = \frac{z - z_o}{c} \tag{1.62}$$

Al tener t despejado en todas las ecuaciones, podemos igualarlas para así obtener las ecuaciones simétricas de la recta.

Definición 1.16. (Ecuaciones simétricas de la recta). Las ecuaciones simétricas de una recta sirven para determinar si un punto dado pertenece o no a la recta y están dadas por:

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c} \tag{1.63}$$

Ejemplo 1.12. Encuentre las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por el punto $A = (4,3,7)$ y es paralela al vector $V = (8,2,6)$.

Una vez haya determinado las ecuaciones paramétricas y simétricas de esta recta, muestre qué puntos sobre la recta se obtienen cuando $t = 1$ y $t = 2$, además, verifique si el punto $P = (4,1,1)$ está o no sobre esta recta.

Solución: para determinar las ecuaciones paramétricas de una recta, solo necesitamos un punto cualquiera sobre la recta y un vector que vaya en la misma dirección de ella, es decir, un vector que actúe como vector director.

Para este caso el punto $A = (4,3,7)$ es un punto sobre la recta y el vector $V = (8,2,6)$ es paralelo a la recta, lo que significa que van en la misma dirección. Por lo tanto, el vector V puede ser un vector director de esta recta. Así, si el punto $A = (x_0,y_0,z_0) = (4,3,7)$ y el vector $V = (a,b,c) = (8,2,6)$, se tiene que las ecuaciones paramétricas de esta recta son:

$$x = x_0 + at = 4 + 8t \tag{1.64}$$

$$y = y_o + bt = 3 + 2t \tag{1.65}$$

$$z = z_o + ct = 7 + 6t \tag{1.66}$$

Para obtener las ecuaciones simétricas de esta recta, despejamos el parámetro t de cada una de las ecuaciones paramétricas y las igualamos simultáneamente, así:

$$x = 4 + 8t \rightarrow t = \frac{x-4}{8} \tag{1.67}$$

$$y = 3 + 2t \rightarrow t = \frac{y-3}{2} \tag{1.68}$$

$$z = 7 + 6t \rightarrow t = \frac{z-7}{6} \tag{1.69}$$

Igualando se tiene:

$$t = \frac{x-4}{8} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-7}{6} \tag{1.70}$$

Ahora que se han obtenido las ecuaciones paramétricas y simétricas de esta recta, obtengamos usando las ecuaciones paramétricas los puntos sobre esta recta cuando $t = 1$ y $t = 2$. Si $t = 1$ se tiene:

$$x = 4 + 8t = 4 + 8 \cdot 1 = 4 + 8 = 12 \tag{1.71}$$

$$y = 3 + 2t = 3 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 = 5 \tag{1.72}$$

$$z = 7 + 6t = 7 + 6 \cdot 1 = 7 + 6 = 13 \tag{1.73}$$

Luego, el punto sobre esta recta cuando $t = 1$ corresponde al punto $P = (12,5,13)$. Si $t = 2$, se tiene:

$$x = 4 + 8t = 4 + 8 \cdot 2 = 4 + 16 = 20 \quad (174)$$

$$y = 3 + 2t = 3 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7 \quad (1.75)$$

$$z = 7 + 6t = 7 + 6 \cdot 2 = 7 + 12 = 19 \quad (1.76)$$

Luego, el punto sobre esta recta cuando $t = 2$ corresponde al punto $P = (20,7,19)$. Por último, para comprobar si el punto $P = (4,1,1)$ está sobre esta recta, acudimos a las ecuaciones simétricas de la recta:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x-4}{8} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-7}{6} \\ t &= \frac{4-4}{8} = \frac{1-3}{2} = \frac{1-7}{6} \\ t &= \frac{0}{8} = \frac{-2}{2} = \frac{-6}{6} \\ t &= 0 = -1 = -1 \end{aligned} \quad (1.77)$$

Luego entonces, el punto $P = (4,1,1)$ no está sobre esta recta, puesto que al reemplazar las componentes $x = 4$, $y = 1$, $z = 1$ del punto en las ecuaciones simétricas, el valor de t no es el mismo en todos los casos.

1.5.4. EJERCICIOS

1. Determine la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones:

   a. Pasa por el punto $A = (-2,1)$ y en la dirección del vector $B = (1,3)$.

   b. Pasa por los puntos $A = (2,4)$ y $B = (-2,2)$.

   c. Pasa por el punto $A = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 2\right)$ y en la dirección del vector B = $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{5}\right)$..

   d. Pasa por los puntos $A = (1,2,-1)$ y $B = (2,-3,5)$.

2. Determine el vector dirección de la recta:

$$\frac{2x-3}{5} = \frac{y+2}{4} = \frac{3z+1}{2}$$

3. Determine si la ecuación:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{2}$$

Es la ecuación de una recta.

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (-1,-3,2)$ y corta a la recta $x(t) = (-1,2,-1) + t(2,2,1)$, en $(1,4,0)$.

1.6 RECTAS PARALELAS, PERPENDICULARES Y OBLICUAS

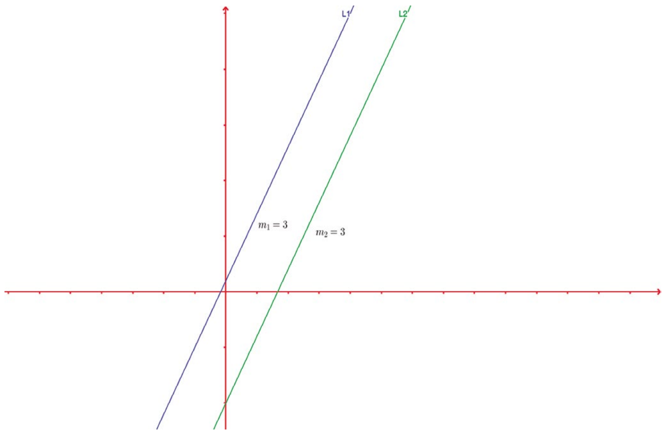
En $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ encontramos rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas. En las siguientes secciones, encontraremos la definición para cada una de estas en el plano y en el espacio.

Veamos entonces como se definen estas rectas en el plano.

1.6.1 RECTAS EN EL PLANO

Definición 1.17. (Rectas paralelas en $\mathbb{R}^2$). En $\mathbb{R}^2$ dos rectas L_1 y L_2 son paralelas, si y solo si sus pendientes m_1 y m_2 son iguales, es decir, $m_1 = m_2$. Dos rectas paralelas nunca se intersecan, ver Figura 1.7.

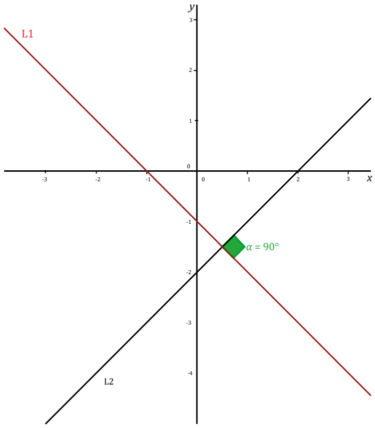
Figura 1.7 Rectas paralelas en el plano



Fuente: Elaboración propia

Definición 1.18. (Rectas perpendiculares en $\mathbb{R}^2$). En $\mathbb{R}^2$ dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, si y solo el producto de sus pendientes m_1 y m_2 es igual a -1, es decir, $m_1 \cdot m_2 = -1$. Dos rectas perpendiculares se intersecan formando un ángulo de 90 grados, ver Figura 1.8.

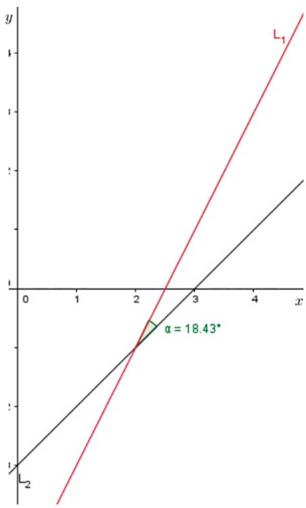
Figura 1.8 Rectas perpendiculares en el plano



Fuente: Elaboración propia

Definición 1.19. (Rectas oblicuas en $\mathbb{R}^2$). En $\mathbb{R}^2$ dos rectas L_1 y L_2 son oblicuas, si y solo sus pendientes m_1 y m_2 son diferentes y el producto entre ellas es diferente de -1. Dos rectas oblicuas se intersecan con un ángulo menor o mayor a 90 grados, ver Figura 1.9.

Figura 1.9 Rectas oblicuas en el plano



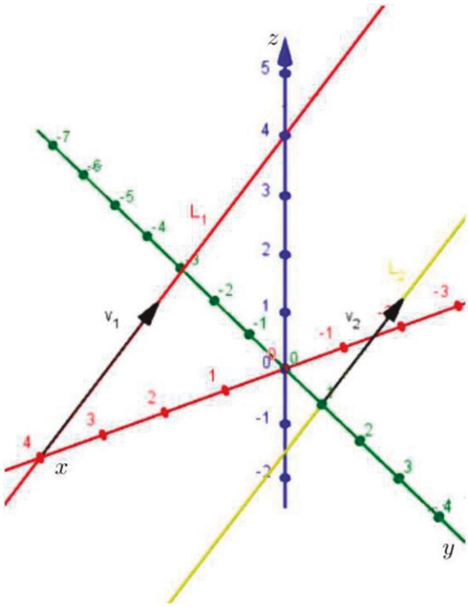
Fuente: Elaboración propia

Dos rectas son oblicuas si no son ni paralelas ni perpendiculares. Definamos ahora estas rectas en el espacio.

1.6.2 RECTAS EN EL ESPACIO

Definición 1.20. (Rectas paralelas en $\mathbb{R}^3$). Dos rectas L_1 y L_2 son paralelas en el espacio si y solo si sus vectores directores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son múltiplo escalar, es decir, $\vec{v}_1 = t\vec{v}_2$ o bien, si su producto cruz $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ genera el vector nulo (0,0,0). Dos rectas paralelas jamás se intersecan, ver Figura 1.10.

Figura 1.10 Rectas paralelas en el espacio



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 1.13. Verifique que las siguientes rectas L_1 y L_2 de $\mathbb{R}^3$ son paralelas:

$$\begin{aligned} &L_1 : x = 1 + 12t;\ y = 7 - 4t;\ z = -2 + 16t \\ &L_2 : x = -4 - 3s;\ y = 3 + s;\ z = 11 - 4s \end{aligned} \tag{1.78}$$

Solución: para solucionar este ejercicio recordemos que la definición de rectas paralelas en $\mathbb{R}^3$ nos dice que dos rectas son paralelas si sus vectores directores son múltiplo escalar, o bien si el producto cruz de sus vectores directores genera el vector nulo.

Miremos si sus vectores directores son múltiplo escalar, esto es, si $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$. Los vectores directores de estas rectas son $\vec{v}_1 = (12, -4, 16)$ y $\vec{v}_2 = (-3, 1,-4)$, respectivamente, así tenemos $(12,-4,16) = k(-3,1,-4) \Rightarrow (12,-4,16) = (-3k, k,-4k)$.

Por igualdad de vectores se tiene que:

$$12 = -3 \Rightarrow k = -\frac{12}{3} = -4$$

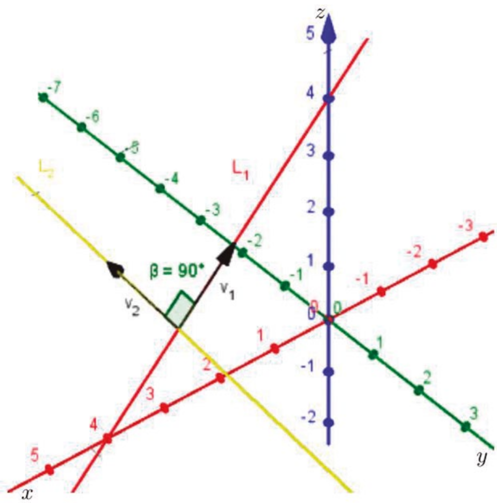
$$-4 = k \Rightarrow k = -4$$

$$16 = -4k \Rightarrow k = -\frac{16}{4} = -4$$

Como el valor de k es igual para todos los casos, significa que estos vectores son múltiplo escalar. Por tanto, estas rectas sí son paralelas.

Definición 1.21. (Rectas perpendiculares en $\mathbb{R}^3$). Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares en $\mathbb{R}^3$, si y solo si el producto punto de sus vectores directores $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ es igual a 0, ver Figura 1.11.

Figura 1.11 Rectas perpendiculares en el espacio



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 1.14. Encuentre:

a. Las ecuaciones paramétricas de la recta L que pasa por los puntos $P_1 = (5,2,1)$ y $P_2 = (1,4,7)$, además encuentre el punto en el cual esta recta corta al plano xy.

b. Una recta que sea perpendicular a L y que pase por el punto $Q = (1,2,3)$.

Solución:

a. Como tenemos dos puntos P_1 y P_2 que están sobre la recta, podemos encontrar un vector director para esta hallando el vector que va desde P_1 hasta P_2, el cual denotaremos como $\overrightarrow{P_1P_2}$ y lo podemos determinar haciendo la operación P_2 - P_1 . De manera que se tiene $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (1,4,7)-(5,2,1) = (-4,2,6)$.
Ahora bien, teniendo el vector director de la recta y conociendo un punto sobre ella que puede ser P_1 o P_2 podemos determinar las ecuaciones paramétricas, recordando que:

$$x = x_o + at \tag{1.79}$$

$$y = y_o + bt \tag{1.80}$$

$$z = z_o + ct \tag{1.81}$$

Así, tomando $P_1 = (5,2,1) = (x_o, y_o, z_o)$ y con $\overrightarrow{P_1P_2} = (-4,2,6) = (a,b,c)$ se tiene que:

$$x = 5 - 4t \tag{1.82}$$

$$y = 2 + 2t \tag{1.83}$$

$$z = 1 + 6t \tag{1.84}$$

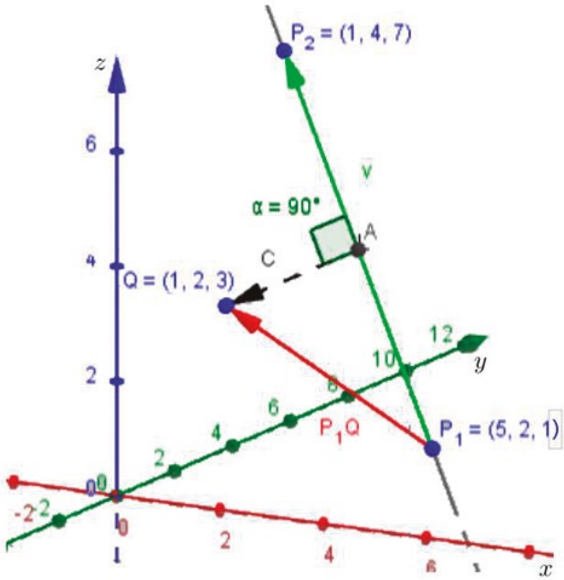
Para encontrar el punto en el cual la recta corta al plano *xy*, debemos saber que para cualquier punto sobre dicho plano la coordenada en *z* es nula, o lo que es lo mismo, cualquier punto sobre el plano *xy* está dado de la forma (*x*,*y*,0). De esta manera, podemos igualar la coordenada *z* de las ecuaciones paramétricas de la recta a *0*, y así obtener el valor de *t* para el cual la recta toca el plano *xy*. Luego, con este valor de *t*, reemplazamos en las coordenadas *x* e *y* de las paramétricas y obtenemos el punto completo. Habiendo dicho esto, se tiene $0 = 1 + 6t \Rightarrow t = -\frac{1}{6}$, por lo que:

$$\begin{aligned} x &= 5 - 4\left(-\frac{1}{6}\right) = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3} \\ y &= 2 + 2\left(-\frac{1}{6}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned} \tag{1.85}$$

Así, el punto en el cual esta recta corta al plano *xy* es $P = (\frac{17}{3}, \frac{5}{3}, 0)$.

b. Deseamos hallar una recta que sea perpendicular a L y que pase por el punto $Q = (1,2,3)$. En la Figura 1.12 podemos observar esta situación.

Figura 1.12 Representación del Ejemplo 1.14



Fuente: Elaboración propia

Para encontrar una recta perpendicular a L, C, y que pase por Q, se debe hallar un vector director para la recta C.

Ahora bien, definiendo el vector que va desde P_1 a Q, al cual denotaremos $\overrightarrow{P_1Q}$, y representando el vector director de la recta L sobre ella misma, al cual denotaremos $\vec{v}$ (note que $\vec{v}$ es el vector que va desde P_1 hasta P_2), se cumple entonces que el vector C corresponde a la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{P_1Q}$ sobre el vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1Q}$, es decir $C = \text{proy}_{\vec{v}}\, \overrightarrow{P_1Q}$. Entonces se tiene que:

$$C = P_1Q - \text{proy}_{\vec{v}}\, P_1Q \tag{1.86}$$

Para aplicar esta fórmula debemos hallar los vectores $\overrightarrow{P_1Q}$ y $\vec{v}$. Se tiene entonces que:

$$\overrightarrow{P_1Q} = Q - P_1 = (1,2,3) - (5,2,1) = (-4,0,2) \tag{1.87}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (1,4,7) - (5,2,1) = (-4,2,6) \tag{1.88}$$

Luego, sustituyendo (1.87) y (1.88) en (1.86) se tiene:

$$C = (-4,0,2) - \frac{(-4,0,2)\cdot(-4,2,6)}{(-4,2,6)\cdot(-4,2,6)}(-4,2,6)$$

$$C = (-4,0,2) - \frac{16+0+12}{16+4+36}(-4,2,6)$$

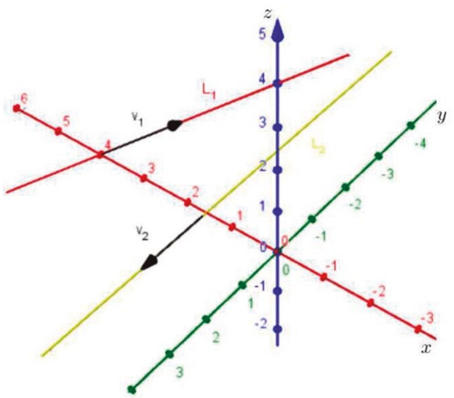
$$C = (-4,0,2) - \frac{1}{2}(-4,2,6)$$

$$C = (-4,0,2) - (-2,1,3) = (-2,-1,-1) \tag{1.89}$$

Habiendo hallado C ya conocemos el vector director de la recta que es perpendicular a L y pasa por el punto Q, de manera que las ecuaciones paramétricas de esta recta son $x = 1 - 2t$; $y = 2 - t$; $z=3 - t$.

Definición 1.22. (Rectas oblicuas en $\mathbb{R}^3$). Dos rectas son oblicuas en el espacio si no son paralelas ni perpendiculares; estas pueden o no intersectarse en $\mathbb{R}^3$, a diferencia de $\mathbb{R}^2$ donde necesariamente si son oblicuas sí se intersecan, ver Figura 1.13.

Figura 1.13 Rectas oblicuas en el espacio



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 1.15. Sean $L_1 : x = 1 + 4t$; $y = 5 - 4t$; $z = -1 + 5t$ y L_2: $x = 2 + 8s$; $y=4-3s$; $z = 5 + s$. Determine si las rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Solución: verifiquemos primero si las rectas son paralelas.
Como:

$$\begin{aligned} L_1 &: x = 1 + 4t;\ \ y = 5 - 4t;\ \ z = -1+5t \\ L_2 &: x = 2 + 8s;\ \ y = 4 - 3s;\ \ z = 5+s) \end{aligned} \tag{1.90}$$

Entonces el vector director de L_1, que lo denotamos por $\vec{v}$, es igual a $\vec{v}$ = (4, -4,5) y el vector director de L_2, que lo denotamos por $\vec{w}$, es igual a $\vec{w}$ = (8,-3,1).
Para concluir que las rectas son paralelas, debemos obtener el mismo escalar k como resultado de la división de las componentes correspondientes, una entre la otra, es decir, que podamos decir que sus vectores directores son múltiplo escalar. Siendo así, se tiene: .

Como el valor de *k* es diferente para todas las divisiones, se concluye que las rectas no son paralelas.

Verifiquemos ahora si las rectas son perpendiculares, es decir, si el producto punto de sus vectores directores es igual a *0*, esto es, si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (4,-4,5) \cdot (8,-3,1) = 32 + 12 + 5 = 49 \tag{1.91}$$

Como el resultado que obtuvimos fue 49, y 49 es diferente de 0, se concluye que estas rectas no son perpendiculares. Llegados a esto, concluimos que las rectas son oblicuas, verifiquemos si estas rectas se cruzan o no.

Para saber si las rectas se intersecan o no, debemos igualar cada componente de las ecuaciones paramétricas de estas rectas y construir un sistema de ecuaciones. Si el sistema tiene solución y al reemplazar los valores de los parámetros en las ecuaciones correspondientes obtenemos el mismo punto, entonces las rectas se cruzarán en ese punto con un ángulo mayor o menor a 90 grados y si el sistema no tiene solución, entonces las rectas no se intersecan. Como:

$$\begin{aligned} &L_1 : x = 1 + 4t;\ \ y = 5 - 4t;\ \ z = -1 + 5t \\ &L_2 : x = 2 + 8s;\ y = 4 - 3s;\ \ z = 5 + s \end{aligned} \tag{1.92}$$

Igualando las variables *x*, *y*, *z* de la expresión (1.92) tenemos:

$$\begin{aligned} &1 + 4t = 2 + 8s \Rightarrow 4t - 8s = 1 \\ &5 - 4t = 4 - 3s \Rightarrow -4t + 3s = -1 \\ &-1 + 5t = 5 + s \Rightarrow 5t - s = 6 \end{aligned} \tag{1.93}$$

De (1.93), nuestro sistema de ecuaciones queda entonces:

$$\begin{aligned} &4t - 8s = 1 \\ &-4t + 3s = -1 \\ &5t - s = 6 \end{aligned} \tag{1.94}$$

Para este sistema no existe solución, por tanto, se deduce que estas rectas son oblicuas, pero no se intersecan en ningún punto.

1.6.3. EJERCICIOS

1. Determine si las siguientes rectas son paralelas o perpendiculares:

   a. $L_1 \quad : x = \frac{5}{2}t; y = 3 - \frac{1}{2}t; z = -1 + 2t$
   $L_2 \quad : x = 3 + 5s; y = 2 - \frac{1}{2}s; z = -2 + s$

   b. $L_1 \quad : x = 6 - 6t; y = -1 - 3t; z = -3 + 4t$
   $L_2 \quad : x = 4 + s; y = 1 + \frac{1}{2}s; z = -2 - \frac{2}{3}s$

   c. $L_1 \quad : x = 3t; y = -1 + t; z = 3 + t$
   $L_2 \quad : x = 4 + s; y = 1 - 2s; z = 5 - s$

2. Determine la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones:

   a. Pasa por el punto (3, -2, -1) y es paralelo a la recta $x(t)$ = (0,2,0) + t(0,2,2).

   a. Pasa por el punto (-1, 3) y es perpendicular a la recta $x(t)$=(-2,2) + t(3,2).

3. Determine si las siguientes ternas de puntos son colineales, es decir, si todos están sobre una misma recta:

   a. (3,4), (-2,-6) y (1,0)

   b. (0,-4), (-3,5) y (2,4)

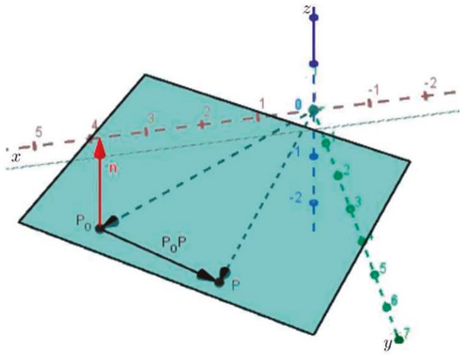
   c. (2,3,-1), (1,0,-2) y (0,-3,-3)

   d. (1,3,-2), (1,4,3) y (1,-1,1)

1.7. PLANOS

Definición 1.23. (Plano). Un plano es una superficie plana, como su nombre lo indica, del espacio. Lo que conocemos como $\mathbb{R}^2$, en $\mathbb{R}^3$ constituye un plano. Todo plano en $\mathbb{R}^3$ tiene un vector normal, que regularmente se denota por $\vec{n}$ y es perpendicular al plano en cualquier punto sobre él.

Figura 1.14 Plano



Fuente: Elaboración propia

Considérese la siguiente situación: P_0 y P son dos puntos cualesquiera sobre el plano, ver figura 1.14. Considérese $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo del plano, P un punto cualquiera del plano de coordenadas $P = (x,y,z)$ y $\vec{n}$ el vector normal de este plano en el punto P_0 cuyas coordenadas son $\vec{n} = (a,b,c)$. Si se traza un vector que vaya desde P_0 hasta P al cual denotaremos $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x,y,z) - (x_0, y_0, z_0) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, se tiene, según la figura 1.14, que $\vec{n}$ y $\overrightarrow{P_0P}$ son mutuamente perpendiculares, esto significa que el producto punto entre $\vec{n}$ y $\overrightarrow{P_0P}$ debe ser igual a cero. Se tiene entonces que:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a,b,c) = 0 \tag{1.95}$$

A la ecuación (1.95) se le llama ecuación vectorial del plano. Ahora, si resolvemos el producto punto se tiene que:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{1.96}$$

A la ecuación (1.96) se le llama ecuación cartesiana del plano. Ahora, si resolvemos los productos se tiene que:

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{1.97}$$

Donde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

Observación. Dos planos son paralelos si y solo si sus vectores normales también lo son, es decir sus vectores normales son múltiplo escalar, o bien su producto cruz genera el vector nulo.

Dos planos serán perpendiculares si y solo si el producto punto de sus vectores normales es igual a cero. De otro modo los planos se intersecan con un ángulo mayor o menor a 90 grados.

Nota 1.4. Los planos se denotan generalmente por π.

Ejemplo 1.16. Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto (-3,2,7) y es perpendicular al vector (4,5,1).

Solución: como el vector (4,5,1) es perpendicular al plano, entonces podemos considerar este vector como el vector normal del plano, luego $\vec{n}$ = (4,5,1).

Por otro lado, sabemos que el punto (-3,2,7) es un punto fijo sobre el plano, luego este punto es nuestro punto P_0 = (-3,2,7).

Por último, si denotamos un punto P general del plano de coordenadas (x,y,z), podemos trazar un vector desde P_0 hasta P, el cual es igual a $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 =$ (x,y,z)-(-3,2,7) = $(x + 3, y - 2, z - 7)$.

Ahora, realizando el producto punto entre este vector y el vector normal, e igualando a 0, se tiene:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (x + 3, y - 2, z - 7) \cdot (4,5,1) = 0$$

$$4\,(x + 3) + 5(y - 2) + (z - 7) = 0$$

$$4x + 12 + 5y - 10 + z - 7 = 0$$

$$4x + 5y + z - 5 = 0$$

$$4x + 5y + z = 5 \tag{1.98}$$

De esta forma, hemos encontrado la ecuación del plano.

Ejemplo 1.17. Encuentre la intersección entre el plano π: $11x - 2y + 4z = 2$ y la recta $L: x - 4 = \frac{y+2}{3} = \frac{7-z}{-5}$..

Solución: como la recta L está dada en su forma simétrica, vamos a llevarla a su forma paramétrica, así:

$$x - 4 = t \Leftrightarrow x = 4 + t$$
$$\frac{y+2}{3} = t \Leftrightarrow y = -2 + 3t \qquad (1.99)$$
$$\frac{7-z}{-5} = t \Leftrightarrow z = 7 + 5t$$

Ahora, reemplazando las ecuaciones paramétricas en la ecuación del plano se tiene:

$$11(4 + t) - 2(-2 + 3t) + 4(7 + 5t) = 2$$

$$44 + 11t + 4 - 6t + 28 + 20t = 2$$

$$25t + 76 = 2$$

$$25t = -74$$

$$t = -\frac{74}{25} \qquad (1.100)$$

Habiendo encontrado el valor del parámetro t en (1.100), lo reemplazamos en las ecuaciones paramétricas en (1.99) y encontramos el punto de intersección entre la recta y el plano. Así:

$$x = 4 + t \Rightarrow x = 4 - \frac{74}{25} = \frac{26}{25}$$
$$t = -2 + 3t \Rightarrow y = -2 + 3\left(-\frac{74}{25}\right) = -\frac{272}{25} \qquad (1.101)$$
$$z = 7 + 5t \Rightarrow z = 7 + 5\left(-\frac{74}{25}\right) = -\frac{39}{5}$$

Así, el punto de intersección entre la recta y el plano corresponde al punto $P = \left(\frac{26}{25}, -\frac{272}{25}, -\frac{39}{5}\right)$.

Ejemplo 1.18. Encuentre la ecuación del plano que contiene a los puntos $P_1 = (4,0,-2)$, $P_2 = (1,1,1)$ y $P_3 = \left(-2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

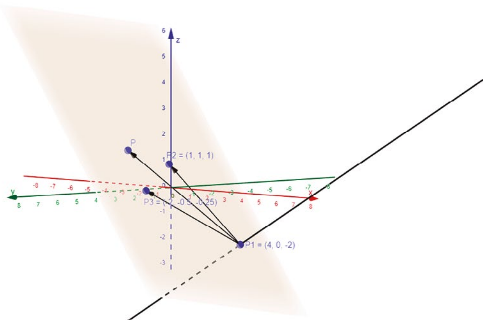
Solución: para hallar la ecuación del plano que contiene 3 puntos, primero debemos hallar el vector normal de este plano; para ello trazamos los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ y $\overrightarrow{P_1P}$, siendo P un punto general de coordenadas (x,y,z), tal como muestra la Figura 1.15. Estos vectores quedarían de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (1,1,1) - (4,0,-2) = (-3,1,3) \tag{1.102}$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = \left(-2,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right) - \left(4,0,-2\right) = \left(-6,-\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right) \tag{1.103}$$

$$\overrightarrow{P_1P} = P - P_1 = (x,y,z) - (4,0,-2) = (x-4, y, z+2) \tag{1.104}$$

Figura 1.15 Gráfica para el Ejemplo 1.18.



Fuente: Elaboración propia

Sabemos que si realizamos un producto cruz entre el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, y el vector $\overrightarrow{P_1P_3}$ se generará un vector que es perpendicular a estos dos vectores y como estos vectores están contenidos en el plano, entonces el vector que genere el producto cruz también será perpendicular al plano de manera que se convierte en el vector normal que necesitamos. Siendo así, se tiene:

$$\vec{n} = P_1P_2 \times P_1P_3 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -3 & 1 & 3 \\ -6 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \left(\frac{7}{4}+\frac{3}{2}\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(-\frac{21}{4}+18\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{3}{2}+6\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{n} = \frac{13}{4}\hat{\mathbf{i}} - \frac{51}{4}\hat{\mathbf{j}} + \frac{15}{2}\hat{\mathbf{k}} \tag{1.105}$$

Si nos vamos a la Figura 1.15 nuevamente, podemos darnos cuenta de que el vector $\overrightarrow{P_1P}$ es perpendicular al vector $\vec{n}$ que acabamos de hallar, de manera que su producto punto debe también ser igual a cero. Luego entonces la ecuación de este plano será:

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (x-4, y, z+2) \cdot \left(\frac{13}{4}, -\frac{51}{4}, \frac{15}{2}\right) = 0$$

$$\frac{13}{4}(x-4) - \frac{51}{4}y + \frac{15}{2}(z+2) = 0$$

$$\frac{13}{4}x - 13 - \frac{51}{4}y + \frac{15}{2}z + 15 = 0$$

$$\frac{13}{4}x - \frac{51}{4}y + \frac{15}{2}z + 2 = 0$$

$$\frac{13}{4}x - \frac{51}{4}y + \frac{15}{2}z = -2 \tag{1.106}$$

En la Figura 1.15 presentamos el plano que contiene los 3 puntos P_1, P_2 y P_3 puntos.

Ejemplo 1.19. Determine si los siguientes planos son paralelos.

$$\begin{aligned} \pi_1 &: 3x - 4y + 5z = 0 \\ \pi_2 &: -6x + 8y - 10z = 4 \end{aligned} \tag{1.107}$$

Solución: sabemos que aquellos coeficientes que acompañen a las variables x, y e z son las correspondientes componentes de sus vectores normales. Siendo así, los vectores normales son respectivamente:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (3,-4,5) \\ \vec{n}_2 &= (-6,8,-10)\ ) \end{aligned} \tag{1.108}$$

Ahora bien, de ser estos dos planos paralelos sus vectores normales deben ser múltiplo escalar o bien su producto cruz debe generar el vector nulo (0,0,0). Verifiquemos si estos vectores normales son múltiplo escalar; para ello, dividimos las componentes correspondientes de cada vector y si obtenemos el mismo escalar α para todos los casos, entonces los planos serán paralelos. Siguiendo esto, se tiene:

$$\alpha = \frac{3}{-6} = \frac{-4}{8} = \frac{5}{-10} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \tag{1.109}$$

Como obtuvimos el mismo valor del escalar α para todos los casos, se tiene que estos planos sí son paralelos, puesto que sus vectores normales son múltiplo escalar.

1.7.1. INTERSECCIÓN ENTRE PLANOS

Dos planos distintos que se cortan determinan dos ángulos positivos de intersección, un ángulo θ agudo que satisface $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ y el suplemento de ese ángulo.

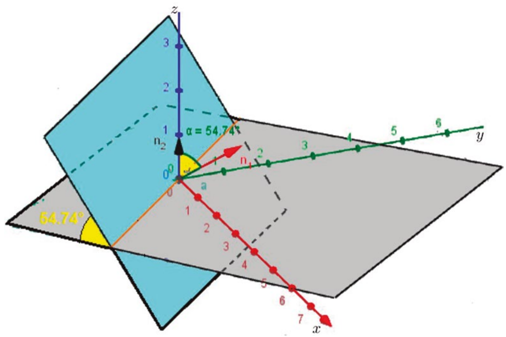
Definición 1.24. (Ángulo de intersección). Si $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son normales a los planos, entonces dependiendo de las direcciones de $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, el ángulo de intersección θ entre $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ podemos determinarlo por:

$$\theta = \arccos(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1||||\vec{n}_2||}) \qquad (1.110)$$

Nota 1.5. La intersección de dos planos distintos en el espacio constituye una recta también en el espacio.

Veamos la Figura 1.16, en la que se presentan los planos $x + y + z = 0$ (color azul) y z=0 (color gris) y comprobemos, mediante la *f*órmula anterior, que realmente el ángulo de intersección de estos planos es el que muestra la *f*igura.

Figura 1.16 Intersección entre planos



Fuente: Elaboración propia

Podemos ver en la Figura 1.16, que el ángulo agudo que forman los vectores normales de estos planos corresponde a α = 54.74; también podemos apreciar la recta de intersección de estos planos (color naranja). Sabemos que el vector normal del plano $x + y + z = 0$ al cual denotaremos $\vec{n}_1$ es el vector (1,1,1) y el vector normal del plano z =0 al cual denotaremos $\vec{n}_2$ es el vector (0,0,1), siendo así, tenemos:

$$\theta = \arccos\left(\frac{|(1{,}1{,}1) \cdot (0{,}0{,}1)|}{\sqrt{3}\sqrt{1}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54.74 \qquad (1.111)$$

De esta forma, hemos comprobado mediante la fórmula que realmente ese es el ángulo con el cual se intersecan los planos.

Ejemplo 1.20. Encuentre el ángulo de intersección entre los planos π_1: $2x - 4y + 4z = 6$ y π_2: $6x + 2y - 3z = 4$. Determine también una parametrización de la recta de intersección de estos planos.

Solución: para hallar el ángulo de intersección entre estos planos haremos uso de la fórmula dada en la Definición 1.24. Sabiendo que el vector normal del plano π_1 al cual denotaremos $\vec{n}_1$ es el vector $\vec{n}_1$ = (2,-4,4) y que el vector normal del plano π_2 al cual denotaremos $\vec{n}_2$ es el vector $\vec{n}_2$ = (6,2,-3) se tiene:

$$\theta = \arccos\left(\frac{|(2,-4,4)\cdot(6,2,-3)|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{|-8|}{\sqrt{36}\sqrt{49}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{8}{(6)(7)}\right) = 79.02 \tag{1.112}$$

Ahora bien, para hallar una parametrización de la recta de intersección que forman estos planos necesitamos un vector director de esta recta al cual denotaremos $\vec{v}$ y un punto sobre ella. Para obtener un vector director para esta recta debemos realizar el producto cruz entre los vectores normales de los dos planos, que nos queda de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & -4 & 4 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} = (12-8)\hat{\mathbf{i}} - (-6-24)\hat{\mathbf{j}} + (4+24)\hat{\mathbf{k}} \tag{1.113}$$

$$\vec{v} = 4\hat{\mathbf{i}} + 30\hat{\mathbf{j}} + 28\hat{\mathbf{k}} = (4,30,28)$$

Ahora que tenemos un vector director para esta recta, solo nos falta obtener un punto sobre ella, o equivalentemente obtener un punto en la intersección de los planos. Las ecuaciones de estos planos forman un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas π_1: $2x - 4y + 4z = 6$ π_2: $6x + 2y - 3z = 4$.

Dándole a la variable x un valor cualquiera podemos obtener un sistema de ecuaciones 2 × 2, el cual podemos resolver más fácilmente. Así, si x = 1, entonces:

$$21 - 4y + 4z = 6 \Rightarrow 2 - 4y + 4z = 6 \Rightarrow -4y + 4z = 4 \tag{1.114}$$

$$6(1) + 2y - 3z = 4 \Rightarrow 6 + 2y - 3z = 4 \Rightarrow 2y - 3z = -2 \tag{1.115}$$

Ahora, multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación (1.115) por 2 el sistema queda:

$$
\begin{aligned}
-4y + 4z &= 4 \\
4y - 6z &= -4
\end{aligned}
\tag{1.116}
$$

Ahora, sumando las dos ecuaciones en (1.116) se tiene $-2z = 0 \Rightarrow z = 0$.

Por último, reemplazando los valores de $x = 1$ y $z = 0$ en cualquiera de las dos ecuaciones originales obtenemos el valor respectivo de y. Reemplazando en la primera ecuación, tenemos $2(1) - 4y + 4(0) = 6 \Rightarrow 2 - 4y = 6 \Rightarrow -4y = 4 \Rightarrow y = -1$.

De manera que un punto en la intersección de estos planos es (1,-1,0). Luego una parametrización de la recta de intersección entre estos planos es:

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + 4t \\
y &= -1 + 30t \\
z &= 28\,t
\end{aligned}
\tag{1.117}
$$

1.7.2. EJERCICIOS

1. Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (-1,0,2)$ y tiene vector normal $\vec{n}_1 = (2,2,3)$.

2. Determine la ecuación del plano que pasa por los puntos $A = (1,1,-1)$, $B = (2,-1,3)$.

3. Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (1,2,1)$ es paralelo al plano π: $2x - y + 3z = 3$.

4. Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (2,-1,3)$ y es perpendicular al plano π: $x + y + z = -3$.

5. Determine el punto de intersección de la recta $x(t) = (0,-4,0) + t(0,4,-1)$ y el plano π: $2x + y - 3z = 2$.

6. Determine si los siguientes planos son paralelos o perpendiculares, y determine el ángulo formado por ellos:

   a. π_1: $x + y + z = 2$ y π_2: $x + y + z = -4$

   b. π_1 : $2x + y - 3z = 1$ y π_2 : $3x + 3y + z = 2$

   c. π_1: $-x + y + z = 3$ y π_2 : $2x + 3y + 2z = 1$

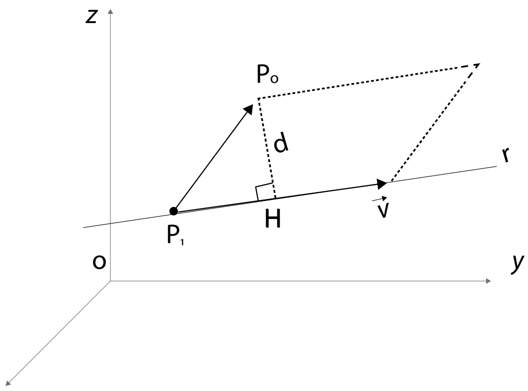
1.8. DISTANCIA

1.8.1 DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

Definición 1.25. (Distancia de un punto a una recta). La distancia del punto P_0 a la recta r, que denotaremos como dP_0,r es el número $dP_0,r = \min\{dP_0,Q) \mid Q \in r\}$.

Sea una recta r definida por un punto P_1 y por el vector director $\vec{v}$; y sea un punto cualquiera en el espacio P_0. Los vectores $\overrightarrow{P_1P_0}$ y $\vec{v}$ determinan un paralelogramo cuya altura corresponde a la distancia d del punto P_0 a la recta r, ver Figura 1.17.

Figura 1.17. Distancia entre un punto y una recta



Fuente: Elaboración propia

Sea θ el ángulo formado entre los vectores $\vec{v}$ y $\overrightarrow{P_1P_0}$. La distancia del punto P_0 a la recta r está dada por:

$$d = \| \overrightarrow{P_1P_0} \| \sin\theta \tag{1.118}$$

Ejemplo 1.21. Halle la distancia entre el punto $P_0 = (2,5,-1)$ y la recta r que pasa por $P_1 = (1,-1,2)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (1,0,1)$.

Solución: para encontrar la distancia entre el punto y la recta, debemos encontrar el ángulo que se forma entre el vector $\overrightarrow{P_1P_0}$ y el vector $\vec{v}$.

Note que el vector $\overrightarrow{P_1P_0}$ es dado por:

$$\overrightarrow{P_1P_0} = P_1 - P_0 = (1,-1,2) - (2,5,-1) = (-1,-6,3) \tag{1.119}$$

Así, usando la fórmula del ángulo entre vectores, podemos calcular el ángulo θ entre los vectores $\overrightarrow{P_1P_0}$ y $\vec{v}$ por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}}{||\vec{v}||\,||\overrightarrow{P_1P_0}||}\right) \tag{1.120}$$

Como $||\vec{v}|| = \sqrt{2}$ y $||\overrightarrow{P_1P_0}|| = \sqrt{46}$; además, $\vec{v}\cdot\overrightarrow{P_1P_0} = 2$, entonces $\theta = \arccos(2/\sqrt{92}) = 77.96°$. De esta forma, podemos calcular la distancia del punto P_0 a la recta r por la fórmula de la distancia de un punto a una recta, se tiene:

$$d = ||\overrightarrow{P_1P_0}||\sin\theta = \sqrt{46}\sin(77.96°) = 2\sqrt{11} \tag{1.121}$$

1.8.2 DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

Definición 1.26. (Distancia entre dos rectas). Sean $r_1 = P_1 + t\vec{v}$ y $r_2 = P_2 + t\vec{v}_2$ dos rectas en el espacio, la distancia entre estas es el número:

$$d(r_1,r_2) = \min\{d(P,Q) \mid P \in r_1 \text{ y } Q \in r_2\} \tag{1.122}$$

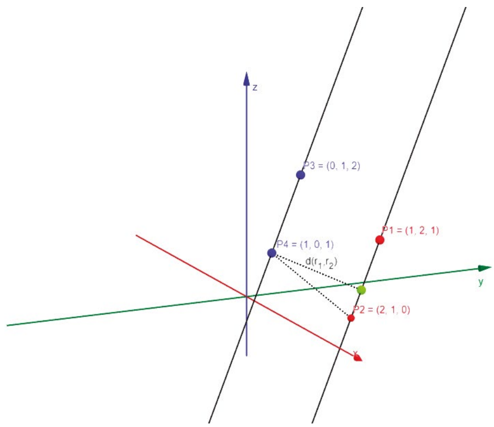
Nota 1.6. Si las rectas se intersecan, por definición $d(r_1,r_2) = 0$.

Cuando las rectas son paralelas, la distancia entre estas se pueda calcular usando la definición anterior, esto es, tomando un punto cualquiera de una de las rectas y calculando la distancia de este punto a la otra recta.

Ejemplo 1.22. Calcule la distancia entre la recta r_1, que pasa por los puntos $P_1 = (1,2,1)$ y $P_2 = (2,1,0)$, y la recta r_2, que pasa por los puntos $P_3 = (0,1,2)$ y $P_4 = (1,0,1)$.

Solución: en la Figura 1.18, vemos que las rectas son paralelas, por tanto, podemos calcular la distancia entre estas dos rectas, como la distancia del punto P_4 a la recta r_1.

Figura 1.18 Distancia entre dos rectas paralelas – Ejemplo 1.22.



Fuente: Elaboración propia

Calculemos el ángulo θ que se forma entre los vectores $\vec{P_2P_4}$ y $\vec{P_2P_1}$, usando la fórmula del ángulo entre dos vectores, tenemos:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{P_2P_1} \cdot \vec{P_2P_4}}{||\vec{P_2P_1}||||\vec{P_2P_4}||}\right) \tag{1.123}$$

Los vectores $\vec{P_2P_1}$ y $\vec{P_2P_4}$ están dados por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{P_2P_1} \cdot \vec{P_2P_4}}{||\vec{P_2P_1}||||\vec{P_2P_4}||}\right) \tag{1.124}$$

Así, $||\vec{P_2P_1}|| = ||\vec{P_2P_4}|| = \sqrt{3}$ y $\vec{P_2P_1} \cdot \vec{P_2P_4} = 1$, entonces $\theta = \arccos(1/\sqrt{3}) = 70.53°$. De esta forma, podemos calcular la distancia del punto P_4 a la recta r_1 por la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

$$d = ||\vec{P_2P_4}||\sin\theta = \sqrt{3}\,\sin(70.53\circ) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \tag{1.125}$$

Concluimos que, la distancia entre las rectas r_1 y r_2 está dada por $2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Si dos rectas r_1 y r_2 son oblicuas y no hay intersección entre estas, podemos encontrar la distancia entre estas, calculando la norma del vector $\vec{P_1P_2}$, donde P_1 es un punto en r_1 y P_2 es un punto en r_2 y además el vector $\vec{P_1P_2}$ es simultáneamente ortogonal a las rectas r_1 y r_2.

Ejemplo 1.23. Calcular la distancia entre las rectas L_1 y L_2 dadas en el Ejemplo 1.15. por L_1 : $x = 1 + 4t$; $y = 5 - 4t$; $z = -1 + 5t$ y L_2: $x = 2 + 8s$; $y = 4 - 3s$; $z = 5 + s$.

Solución 1.23. Del Ejemplo 1.15 sabemos que L_1 y L_2 son rectas oblicuas y que la intersección entre estas es vacía; además, que sus vectores directores están dados respectivamente por $\vec{v}$ =(4,-4,5) y $\vec{w}$ = (8,-3,1).

Debemos encontrar un vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, con P_1 un punto en L_1 y L_2 un punto en L_2 y que además $\overrightarrow{P_1P_2}$, sea simultáneamente ortogonal a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Es decir, que:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{w} = 0 \tag{1.126}$$

Note que un punto P_1 tiene la forma $(1 + 4t,\ 5- 4t, -1 + 5t)$ y que un punto P_2 tiene la forma $(2 + 8s, 4 -3s, 5 + s)$, así, el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ tiene la forma:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_1 - P_2$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1 + 4t,\ 5- 4t, -1 + 5t) - (2 + 8s, 4 -3s, 5 + s),$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1 + 4t - 8s, 1 - 4t + 3s, - 6 + 5t - s) \tag{1.127}$$

Así, el producto escalar $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{v}$ nos queda:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{v} = (-1 + 4t - 8s, 1 - 4t + 3s, -6 +5t - s) \cdot (4,-4,5)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{v} = -4 + 16t - 32s -4 + 16t - 12s - 30 + 25t - 5s$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{v} = -38 + 57t - 49s = 0 \tag{1.128}$$

Y el producto escalar $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{w}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{w} = (-1 + 4t - 8s, 1- 4t + 3s, -6 + 5t - s) \cdot (8,-3,1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{w} = -8 + 32t - 64s - 3 + 12t - 9s - 6 + 5t - s$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{w} = -17 + 49t -74s = 0 \tag{1.129}$$

Las dos ecuaciones anteriores (1.128) y (1.129) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, del que podremos determinar con exactitud el valor de t y s. Si despejamos t de la primera ecuación, obtenemos $t = \frac{38}{57} + \frac{49}{57}s$.. Al reemplazarlo en la segunda ecuación, nos queda 49 $\left(\frac{38}{57}+\frac{49}{57}s\right)$ - 74s = 17. Es decir 1862-1817s = 969. Por lo que -1871s = 969 - 1862, es decir $s=\frac{893}{1817}$. Así, el valor de t es dado por $t=\frac{38}{57}+\frac{49}{57}\frac{893}{1817}=\frac{1979}{1817}$

Así, el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ está dado por:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1 + 4t - 8s, 1 - 4t + 3s, -6 + 5t - s)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1 - \frac{7916}{1817} - \frac{7144}{1817}, 1 - \frac{7916}{1817} + \frac{2679}{1817}, -6 + \frac{9895}{1817} - \frac{893}{1817})$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-\frac{1045}{1817}, -\frac{3420}{1817}, -\frac{1900}{1817}) \tag{1.130}$$

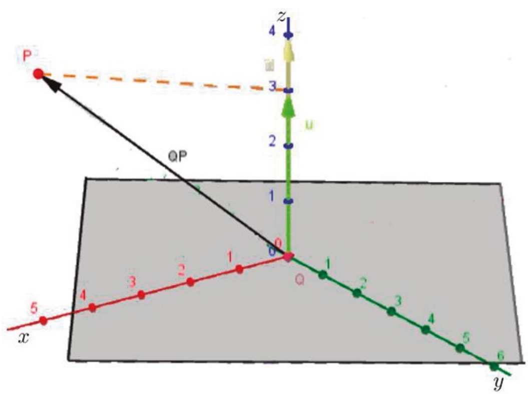
Y por tanto, la distancia entre las rectas L_1 y L_2 está dada por:

$$|| \overrightarrow{P_1P_2} || = \sqrt{(\frac{1045}{1817})^2 + (\frac{3420}{1817})^2 + (\frac{1900}{1817})^2} \approx 2.23 \tag{1.131}$$

Distancia entre un punto y un plano

Si entendemos la distancia desde el punto P al plano (color gris) (ver Figura 1.19), como la distancia más corta que pueda haber desde dicho punto al plano, al ubicar un punto Q cualquiera sobre el plano y trazar un vector $\vec{QP}$ que vaya desde Q hasta P, se tiene que la distancia de P al plano es la norma de la proyección del vector $\vec{QP}$ sobre el vector normal $\vec{n}$ del plano, como se indica en la Figura 1.19.

Figura 1.19 Distancia entre un punto y un plano



Fuente: Elaboración propia

Definición 1.27. (Distancia entre un punto y un plano). Sea π un plano, definimos la distancia de un punto P al plano π como:

$$d(\mathrm{P}, \pi) = |\mathrm{proy}_n\, QP| \tag{1.132}$$

Ahora bien, considerando P como un punto de coordenadas $P = (x,y,z)$ y Q un punto de coordenadas $Q = (x_o, y_o, z_o)$ entonces el vector $\vec{QP}$ nos queda:

$$\vec{QP} = P - Q = (x,y,z) - (x_o, y_o, z_o) = (x - x_o, y - y_o, z - z_o) \tag{1.133}$$

Ahora, sabiendo que el vector normal del plano, $\vec{n}$, es igual a $\vec{n} = (a,b,c)$, aplicamos la fórmula de proyección vista anteriormente y obtenemos:

$$||\mathrm{proy}_n\, QP|| = \left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{QP}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\right| ||\vec{n}|| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{QP}|}{||\vec{n}||^2}||\vec{n}|| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{QP}|}{||\vec{n}||}$$

$$||\mathrm{proy}_n\, QP|| = \frac{|(a,b,c)\cdot(x - x_o, y - y_o, z - z_o)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$||\mathrm{proy}_n\, QP|| = \frac{|a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$||\mathrm{proy}_n\, QP|| = \frac{|ax - ax_o + by - by_o + cz - cz_o|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d(P,\pi) = ||\mathrm{proy}_n\, QP|| = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{1.134}$$

Donde $d = -ax_o - by_o - cz_o$ corresponde al término independiente de la ecuación del plano al cual se quiera calcular la distancia desde un punto dado.

Ejemplo 1.24. Encuentre la distancia entre el plano $\pi: 3x - 2y + 6z + 3 = 0$ y el punto $P\left(\frac{1}{2}, -2, 4\right)$.

Solución: como tenemos la ecuación del plano sabemos que: $a = 3$, $b = -2$ y $c = 6$, corresponden a las componentes del vector normal $\vec{n}$ del plano y sabemos que $d = 3$ es el término independiente. También sabemos que $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$ y $z = 4$, que corresponden a las componentes del punto P, ahora simplemente reemplazamos en la fórmula mostrada anteriormente estos valores. Así, se tiene:

$$d(P,\pi) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\left|3\left(\frac{1}{2}\right) - 2(-2) + 6(4) + 3\right|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}}$$

$$d(P,\pi) = \frac{\left|\frac{65}{2}\right|}{\sqrt{49}} = \frac{\frac{65}{2}}{7} = \frac{65}{14} = 4.64 \tag{1.135}$$

Si dos planos π_1 y π_2 son paralelos, calcular la distancia entre estos consiste en calcular la distancia de un punto cualquiera P_1 en π_1 al plano π_2 usando la Definición 1.27. De la misma forma, si una recta r y un plano π son paralelos, calcular la distancia entre estos consiste en calcular la distancia de un punto cualquiera P sobre la recta r al plano π.

1.8.4. EJERCICIOS

1. Determine la distancia entre el punto y la recta dados, si satisfacen las siguientes condiciones:

   a. El punto $P = (-1,2,1)$ y la recta r que pasa por $P_1 = (-1,2,3)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (1,1,-1)$.

   b. El punto $P = (2,-2,0)$ y la recta r definida por $(1,0,-2) + t(2,-1,1)$.

   c. El punto $P = (x_1, y_1, z_1)$ y los ejes x, y y z, en términos de x_1, y_1 y z_1.

2. Calcule la distancia entre la recta r_1 que pasa por los puntos $P_1 = (1,2,1)$ y $P_2 = (2,1,0)$, y la recta r_2, que pasa por los puntos $P_3 = (0,1,2)$ y $P_4 = (1,0,1)$.

3. Calcule la distancia entre la recta $L_1\!: x = 2 - \frac{1}{2}t;\ y = 1 + \frac{2}{3}t;\ z = -1 - 3t$ y la recta $L_2\!: x = 2 + \frac{5}{2}s;\ y = 2 - 2s;\ z = 1 + \frac{3}{2}s$.

4. Determine la distancia entre el plano π: $x - y + z - 3 = 0$ y el punto $P\,(3,-2,-4)$.

5. Determine la distancia entre el plano π que pasa por los puntos $A = (-3,3,-2)$, $B = (2,1,-1)$; y el punto $P(3,-2,-4)$.

6. Determine la distancia entre el plano π: $x - y + z - 3 = 0$ y la recta L: $x = -1 + 2t$; $y = 3 - 2t$; $z = 3 + t$.

2

CAPÍTULO 2

FUNCIONES VECTORIALES Y CURVAS EN EL ESPACIO

2.1 CURVAS PLANAS Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Definición 2.1. (Curva plana). Una curva plana C es un conjunto de puntos (x,y) cuyas coordenadas están dadas por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, en las que f y g son continuas en un intervalo I. A la variable t se le denomina parámetro.

Ejemplo 2.1. Trace la gráfica de la curva que tiene las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$ para $-1 \leq t \leq 2$.

Solución: para solucionar este ejercicio, realizaremos una tabla de valores, ver Tabla 1, en la que damos valores al parámetro t entre -1 y 2, de manera que iremos obteniendo los pares coordenados para realizar la gráfica respectiva.

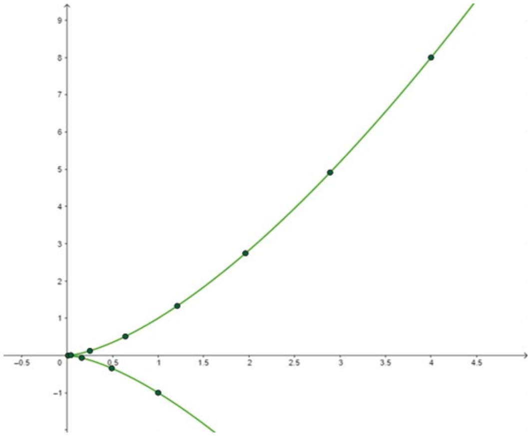
Tabla 1. Tabla de valores para el Ejemplo 2.1

t	$x=t^2$	$y=t^3$
-1	1	-1
-0.7	0.49	-0.343
-0.4	0.16	-0.064
-0.1	0.01	-0.001
0.2	0.04	0.008
0.5	0.25	0.125
0.8	0.64	0.512
1.1	1.21	1.331
1.4	1.96	2.744
1.7	2.89	4.913
2	4	8

Fuente: Zill (2012) Elaboración propia

Observando la tabla nos damos cuenta de que para cada valor de t entre -1 y 2 hemos obtenido un par coordenado (x,y), de manera que ya podemos realizar nuestra gráfica (Figura 2.1). Usando la línea de comandos en GeoGebra Curva(t^2,t^3,t, -1,2).

Figura 2.1 Curva plana del Ejemplo 2.1.



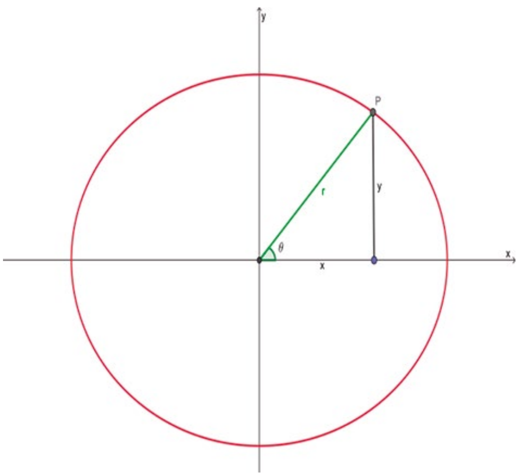
Fuente: Zill (2012) Elaboración propia

De la ecuación paramétrica $x = t^2$ despejamos t obteniendo $t = \sqrt{x}$; reemplazando esta expresión en la otra ecuación paramétrica se tiene $y = t^3 = (\sqrt{x})^3 = \sqrt{x^3}$ de donde $y = \sqrt{x^3}$ corresponde a la ecuación de la gráfica en función de x, es decir, no parametrizada.

Ejemplo 2.2. Encuentre una parametrización para la ecuación de una circunferencia centrada en el origen coordenado con radio *r*.

Solución:

Figura 2.2 Gráfica de la circunferencia del Ejemplo 2.2



Fuente: Zill (2012) Elaboración propia

Para resolver este ejercicio considere la Figura 2.2, la cual corresponde al de una circunferencia centrada en el origen y cuyo radio es r. Sabemos que la ecuación de una circunferencia con estas características es dada por $x^2 + y^2 = r^2$, ahora, si consideramos un punto P cualquiera sobre la circunferencia con coordenadas (x,y) y trazamos el radio desde el centro a este punto, como se muestra en la Figura 2.2, podemos observar que se forma un ángulo θ con respecto al eje x. De esta situación, se deduce que cualquier punto P situado sobre la circunferencia está orientado, por decirlo de alguna manera, en la dirección de un ángulo θ respecto al eje x.

De esta manera, si formamos un triángulo rectángulo con r como hipotenusa, se puede parametrizar la ecuación de la circunferencia en términos de θ, puesto que el radio es fijo. Así, se tiene:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{rcos}(\theta) \rightarrow \mathrm{x}\ (\theta) = \mathrm{rcos}\ (\theta) \tag{2.1}$$

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{y}{r} \rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{r}\backslash\mathrm{sen}\ (\theta) \rightarrow \mathrm{y}\ (\theta) = \mathrm{rsen}\ (\theta) \tag{2.2}$$

De esta forma, hemos encontrado una parametrización para la ecuación de la circunferencia en términos del parámetro θ.

Si se quisiese eliminar la parametrización, entonces utilizamos la ecuación de la circunferencia en términos de x e y y reemplazamos las ecuaciones paramétricas. Así:

$$\begin{aligned} \mathrm{x}^2 + y^2 &= (\mathrm{rcos}(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2 \\ &= \mathrm{r}^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) \\ &= \mathrm{r}^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &= \mathrm{r}^2 \qquad (2.3) \end{aligned}$$

2.1.1 PENDIENTE DE UNA RECTA TANGENTE A UNA CURVA PARAMETRIZADA

Definición 2.2. (Pendiente de una recta tangente). Sean $x = f(t)$ y $y = g(t)$ las funciones diferenciables que definen a la curva C. La pendiente de una recta tangente a C en un punto x_0 de la curva está dada por $\frac{dy}{dx}$, evaluada en el punto x_0 de C.

Para calcular esta derivada se calcula Δx y Δy como, $\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$ y $\Delta y = g(t + \Delta t) - g(t)$. Así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} \tag{2.4}$$

De modo que:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \tag{2.6}$$

Del mismo modo obtenemos la segunda derivada de y con respecto a x de la curva parametrizada C. Así:

$$\frac{d^2(y)}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} \tag{2.7}$$

2.1.2 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

$$\frac{d^n(y)}{dx^n} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{d^{n-1}(y)}{dx^{n-1}}\right]}{\frac{dx}{dt}} \tag{2.8}$$

Por ejemplo, la derivada de tercer orden de y con respecto a x se notaría:

$$\frac{d^3(y)}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{d^2(y)}{dx^2}\right]}{\frac{dx}{dt}} \tag{2.9}$$

Ejemplo 2.3. Obtener la derivada de tercer orden para la curva parametrizada $x = 4t + 6$, $y = t^2 + t - 2$

Solución: para solucionar este problema, vamos a encontrar la primera derivada de esta curva, de esta manera se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{2t+1}{4} \tag{2.10}$$

Ahora bien, siguiendo la definición para derivadas de orden superior obtenemos la segunda derivada de esta curva parametrizada. Así:

$$\frac{d^2(y)}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{2t+1}{4}\right)}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8} \tag{2.11}$$

Por último, para obtener la tercera derivada de esta curva parametrizada volvemos a aplicar la definición para derivadas de orden superior. Así, se tiene:

$$\frac{d^3(y)}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{4} = \frac{0}{4} = 0 \tag{2.12}$$

2.1.3 EJERCICIOS

1. Usando el programa GeoGebra. Trace la gráfica de las siguientes curvas definidas de forma paramétrica por:

   a. x = -t, y = 2t - 1 para -3 ≤ t ≤4

   b. x = 2t, y = t^2 para -2 ≤ t ≤ 4

   c. x = 3sent, y = 3cost para 0 ≤ t ≤ 2π

   d. x = 2sent, y = 5cost para 0 ≤ t ≤ 2π

   e. x = t, = tantπ para 0 ≤ t ≤ 2π

2. Encuentre la ecuación perimétrica para la ecuación de las siguientes curvas rectangulares.

   a. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$

   b. y = 3x-5

   c. $x = y^2$

   d. $x^2 + y^2 = 16$

3. Obtener la pendiente de la recta tangente $\frac{dy}{dx}$ de las curvas definidas de forma perimétrica por:

   a. $x = 3t^2 - t$, $y = 5t + 2$ para $t = 2$

   b. $x = t^2$, $y = 2t$ para $t = -5$

c. $x = 3\text{sen}t$, $y = 3\cos t$ para $t = \pi/4$

d. $x = t$, $y = \tan(t\pi)$ para $t = 1$

4. Determine la segunda $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ y tercera derivada $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ de las curvas definidas de forma perimétrica por:

a. $x = 3t^2 - 4$, $y = t^2 - \frac{5}{t} + 2$

b. $x = 4t^4$, $y = t^5 + 4t^3$

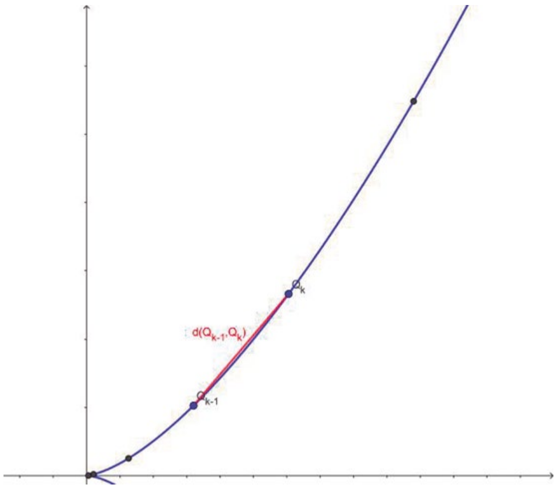
c. $x = \cos t$, $y = \cos^t$

2.2 LONGITUD DE UNA CURVA EN EL PLANO

Definición 2.3. (Longitud de una curva). Si C es una curva parametrizada de manera que $x = f(t)$, $y = \boldsymbol{g}(t)$ para $a \leq t \leq b$, entonces podemos aproximar la longitud de una porción de la curva comprendida en el intervalo $[a,b]$. Si consideramos la curva como una serie de n puntos separados a cierta distancia entre ellos entonces si ubicamos el n-ésimo punto sobre la curva (Q_n) y otros dos puntos cualesquiera sobre ella los cuales denominaremos Q_k y Q_{k-1} como se muestra en la Figura 2.3, de modo que Q_{k-1} sea el punto anterior a Q_k en esa serie de n puntos, entonces si trazamos un segmento desde Q_{k-1} hasta Q_k que corresponda a la distancia entre estos dos puntos podemos aproximar la longitud de una porción de la curva (no necesariamente la distancia comprendida solamente entre Q_{k-1} y Q_k si realizamos una sumatoria de todos los segmentos trazados entre dos puntos de la serie de n puntos en dicha porción de la curva. Así:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} d\,(Q_{k-1}, Q_k) \tag{2.13}$$

Figura 2.3 Longitud de una curva en el plano



Fuente: Elaboración propia

Ahora bien, sabemos que Q_{k-1} y Q_k son dos puntos bidimensionales sobre la curva parametrizada C lo que significa que son pares coordenados dados para un respectivo valor del parámetro t, de esta forma Q_k puede escribirse como $Q_k = (f(t_k),\boldsymbol{g}(t_k))$ y Q_{k-1} puede escribirse como $Q_{k-1} = (f(t_{k-1}),\boldsymbol{g}(t_{k-1}))$. Si aplicamos la fórmula de distancia entre dos puntos vista anteriormente se tiene:

$$d(Q_{k-1},Q_k) = \sqrt{\left(f(t_k) - f(t_{k-1})\right)^2 + \left(g(t_k) - g(t_{k-1})\right)^2} \qquad (2.14)$$

De esta forma se tiene:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f(t_k) - f(t_{k-1})\right)^2 + \left(g(t_k) - g(t_{k-1})\right)^2} \qquad (2.15)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que una curva parametrizada por $x = f(t)$ y $y = \boldsymbol{g}(t)$ para $a \le t \le b$ se considera alisada o suave si $f'(t)$ y $\boldsymbol{g}'(t)$ son continuas en $[a,b]$ y no son simultáneamente nulas en dicho intervalo, entonces si tomamos una variación del parámetro t para los puntos Q_{k-1} y Q_k se tiene:

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} \qquad (2.16)$$

Ahora, si consideramos el intervalo como una gran serie de puntos, de manera que los puntos Q_{k-1} y Q_k queden lo más cerca posible entre ellos, con la intención de reducir el margen de error al momento de calcular la distancia entre ellos, significa que el valor del parámetro que da origen al punto Q_{k-1} y el valor del parámetro que da origen al punto Q_k están muy cercanos en términos de valor. Si atendemos a este razonamiento entonces se deduce que, si reducimos significativamente la variación del parámetro para los puntos Q_{k-1} y Q_k, de modo que se haga casi cero, obtendríamos una considerable reducción del margen de error al momento de calcular la longitud de la curva en un intervalo determinado. Matemáticamente esto sería:

$$\Delta t_k \Rightarrow 0$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = 0 \Rightarrow t_k = t_{k-1} \tag{2.17}$$

Ahora, tomaremos un valor del parámetro que origine un punto sobre la curva exactamente en la mitad de los puntos Q_{k-1} y Q_k. A este valor de t lo llamaremos t_{k*} y originará un punto Q_{k*} sobre la curva y en la mitad de Q_{k-1} y Q_k. Aplicando el teorema del valor medio se tiene:

$$\begin{aligned} f'(t_{k*}) &= \frac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \Rightarrow f'(t_{k*})\cdot(t_k - t_{k-1}) = f(t_k)-f(t_{k-1}) \\ g'(t_{k*}) &= \frac{g(t_k)-g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \Rightarrow g'(t_{k*})\cdot(t_k - t_{k-1}) = g(t_k)-g(t_{k-1}) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Sabiendo que $t_k - t_{k-1} = \Delta t_k$, podemos reemplazar las expresiones $f(t_k) - (ft_{k-1})$ y $\boldsymbol{g}(t_k) - \boldsymbol{g}(t_{k-1})$ en la expresión de sumatoria de la parte superior. Así, se tiene:

$$\begin{aligned} S &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f(t_k)-f(t_{k-1})\right)^2 + \left(g(t_k)-g(t_{k-1})\right)^2} \\ S &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f'(t_{k*})\cdot(t_k - t_{k-1})\right)^2 + \left(g'(t_{k*})\cdot(t_k - t_{k-1})\right)^2} \\ S &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(f'(t_{k*})\cdot \Delta t_k)^2 + (g'(t_{k*})\cdot \Delta t_k)^2} \\ S &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f'(t_{k*})\right)^2\cdot(\Delta t_k)^2 + \left(g'(t_{k*})\right)^2\cdot(\Delta t_k)^2} \\ S &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta t_k)^2\cdot\left(\left(f'(t_{k*})\right)^2 + \left(g'(t_{k*})\right)^2\right)} \\ S &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f'(t_{k*})\right)^2 + \left(g'(t_{k*})\right)^2}\cdot \Delta t_k \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ahora, para lograr un valor exacto y no aproximado de la longitud de la curva en el intervalo, debemos hacer tender a *0*, como mencionamos anteriormente, el valor de la variación del parámetro t en (2.19), de manera que reduzcamos la longitud de la distancia entre los puntos hasta el extremo de que podamos cubrir totalmente la porción de la curva a la cual queremos determinar la longitud, de esta manera se tiene:

$$S = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f'(t_{k*})\right)^2 + \left(g'(t_{k*})\right)^2} \cdot \Delta t_k \tag{2.20}$$

Así, tenemos una forma de la integral de Riemann, de manera que esta última expresión se puede escribir como:

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2} \cdot \, dt \tag{2.21}$$

Ejemplo 2.4. Encuentre la longitud de la curva dada por $x = 4t$ y $y = t^2$ para $0 \leq t \leq 2$

Solución: para solucionar este problema debemos hallar las primeras derivadas de las ecuaciones paramétricas respecto a t. Así:

$$\begin{aligned} x &= 4t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f'(t) = 4 \\ y &= t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = g'(t) = 2t \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ahora que se han obtenido las primeras derivadas aplicamos la fórmula para determinar la longitud de arco que se demostró anteriormente, de esta manera se tiene:

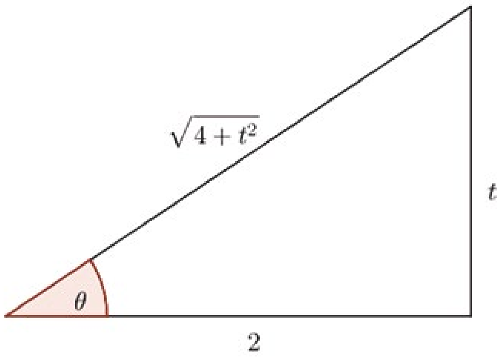
$$S = \int_0^2 \sqrt{4^2 + (2t)^2} \cdot \, dt \tag{2.23}$$

Ya sabemos que la longitud S de la curva para $0 \leq t \leq 2$ se obtendrá calculando esta integral, entonces:

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \sqrt{4^2 + (2t)^2} \cdot \, dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{16 + 4t^2} \cdot \, dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{4(4 + t^2)} \cdot \, dt \\ &= \int_0^2 2\sqrt{4 + t^2} \cdot \, dt \\ &= 2\int_0^2 \sqrt{4 + t^2} \cdot \, dt \end{aligned} \tag{2.24}$$

Llegados a este punto y revisando la integral que nos ha quedado, nos damos cuenta que no nos sirve una técnica de sustitución, ni tampoco podemos aplicar el método de integración por partes; sin embargo, vemos que el integrando podemos sustituirlo de forma trigonométrica, pues tenemos la raíz de la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo, como se observa en la Figura 2.4, es decir la expresión que representa la hipotenusa de dicho triángulo. Al ser la suma de los cuadrados de los catetos podemos sustituir utilizando las funciones trigonométricas tangente y secante.

Figura 2.4 Triángulo rectángulo con hipotenusa √(4+t^2)



Fuente: Elaboración propia

Como se mencionó anteriormente, si imaginamos un triángulo rectángulo como el de la Figura 2.4, podemos sustituir los catetos del triángulo por las raíces de los términos dentro de la raíz del integrando y por ende la hipotenusa es la expresión completa en el integrando. Ahora bien, aplicando las razones tangente y secante se tiene:

$$\begin{aligned} &\tan(\theta) = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 2\tan(\theta) \\ &\sec(\theta) = \frac{\sqrt{4+t^2}}{2} \Rightarrow \sqrt{4+t^2} = 2\sec(\theta) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Ahora bien, como estamos pasando todo a términos de θ debemos encontrar una expresión del diferencial de t en términos de un diferencial de θ para ello utilizaremos la expresión que obtuvimos al aplicar la razón tangente y derivaremos t con respecto a θ, de esta manera se tiene:

$$t = 2\tan(\theta) \Rightarrow \frac{dt}{d\theta} = 2sec^2(\theta) \Rightarrow dt = 2\sec^2(\theta)d\theta \tag{2.26}$$

También, debemos tener en cuenta que como estamos cambiando el parámetro, es decir, estamos pasando de t a θ, el intervalo de integración también debe cambiar; para encontrar el cambio en los límites de integración volveremos a utilizar la expresión obtenida al aplicar la razón tangente y veremos que valores adquiere θ cuando $t = 0$ y $t = 2$. Así, se tiene:

$$\begin{aligned} t &= 2\tan(\theta) \rightarrow t = 0 \Rightarrow 0 = 2\tan(\theta) \Rightarrow \frac{0}{2} = \tan(\theta) \\ 0 &= \tan(\theta) \Rightarrow \theta = \arctan(0) \Rightarrow \theta = 0 \\ t &= 2\tan(\theta) \rightarrow t = 2 \Rightarrow 2 = 2\tan(\theta) \Rightarrow \frac{2}{2} = \tan(\theta) \\ 1 &= \tan(\theta) \Rightarrow \theta = \arctan(1) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \tag{2.27}$$

De esta forma se concluye que si se realiza un cambio de t a θ, entonces si $0 \leq t \leq 2$ se tiene $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Por último, reemplazamos todo en la integral. Así:

$$2\int_0^2 \sqrt{4+t^2} \cdot dt \tag{2.28}$$

Se realiza sustitución trigonométrica:

$$\begin{aligned} 2\int_0^2 \sqrt{4+t^2} \cdot dt &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sec(\theta) \cdot 2\sec^2(\theta)d\theta \\ 2\int_0^2 \sqrt{4+t^2} \cdot dt &= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(\theta) \cdot \sec^2(\theta)d\theta \end{aligned} \tag{2.29}$$

Llegados a esta integral vamos a aplicar el método de integración por partes para la integral indefinida, para ello sea:

$$\begin{aligned} u &= \sec(\theta) \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = \sec(\theta)\tan(\theta) \Rightarrow du = \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta \\ dv &= \sec^2(\theta)d\theta \Rightarrow \int dv = \int \sec^2(\theta)d\theta \Rightarrow v = \tan(\theta) \end{aligned} \tag{2.30}$$

Luego:

$$\begin{aligned} &\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) - \int \tan(\theta) \cdot \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta \\ &\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) - \int \tan^2(\theta) \cdot \sec\theta d\theta \\ &\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) - \int \sec^2(\theta) - 1) \cdot \sec(\theta)d\theta \\ &\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) - \int \sec^3(\theta) - \sec(\theta)) \cdot d\theta \\ &\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) - \int \sec^3(\theta)d\theta + \int \text{"sec"}(\theta)d\theta \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\int \sec^3(\theta)d\theta + \int \sec 3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) + \int \sec(\theta)d\theta$$
$$2\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) + \int \sec(\theta)d\theta$$

Ahora bien, para resolver la integral de sec(θ) que nos ha quedado en el miembro derecho vamos a multiplicar y dividir el integrando por la expresión sec(θ) + tan(θ), de esta forma nos queda:

$$2\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) + \int \sec(\theta)\cdot\frac{\sec(\theta)+\tan(\theta)}{\sec(\theta)+\tan(\theta)}\cdot d\theta$$
$$2\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) + \int \frac{\sec^2(\theta)+\sec(\theta)\tan(\theta)}{\sec(\theta)+\tan(\theta)}\cdot d\theta \qquad (2.32)$$

Ahora podemos aplicar la técnica de sustitución, para ello sea:

$$u = \sec(\theta) + \tan(\theta) \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = \sec(\theta)\tan(\theta) + \sec^2(\theta)$$

$$du = (\sec(\theta)\tan(\theta) + \sec^2(\theta))d\theta \qquad (2.33)$$

Reemplazando se tiene:

$$2\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) + \int \frac{1}{u}\cdot du$$

$$\begin{aligned}
2\int \sec^3(\theta)d\theta &= \sec(\theta)\tan(\theta) + \ln(u)\\
2\int \sec^3(\theta)d\theta &= \sec(\theta)\tan(\theta) + \ln\big(\sec(\theta)+\tan(\theta)\big)\\
\int \sec^3(\theta)d\theta &= \frac{\sec(\theta)\tan(\theta) + \ln\big(\sec(\theta)+\tan(\theta)\big)}{2} \qquad (2.34)\\
8\int \sec^3(\theta)d\theta &= 8\cdot\frac{\sec(\theta)\tan(\theta) + \ln\big(\sec(\theta)+\tan(\theta)\big)}{2}\\
8\int \sec^3(\theta)d\theta &= 4\cdot\Big(\sec(\theta)\tan(\theta) + \ln\big(\sec(\theta)+\tan(\theta)\big)\Big)
\end{aligned}$$

Por último, volviendo a definir la integral para el intervalo de variación del parámetro se tiene:

$$8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3(\theta)d\theta = \Big[4\cdot\Big(\sec(\theta)\tan(\theta) + \ln\big(\sec(\theta)+\tan(\theta)\big)\Big)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3(\theta)d\theta = 9.1823 \qquad (2.35)$$

Para llegar a este resultado se aplicó el teorema fundamental del cálculo, es decir se realizó la diferencia del resultado de la integral evaluado en el límite superior menos el resultado de la integral evaluado en el límite inferior y esa es la longitud de la curva que se pide en el problema.

2.2.1 EJERCICIOS

1. Determine la longitud de arco de la curva x = sen$t$, y = cos$t$ en el intervalo:

    a. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

    b. $[0, \pi]$

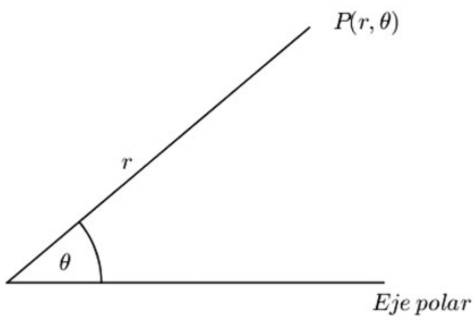
2. Determine la longitud de arco de la curva x = $3t^2$, y = $2t^3$ en el intervalo [1,9].

3. Determine la longitud de arco de la curva x = t^3, y = t^2 en el intervalo [0,9].

2.3 SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

El sistema de coordenadas polares es un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto en el plano, $P(r,\theta)$, es determinado por una distancia r, denominada coordenada radial, y un ángulo θ, denominado coordenada angular, en relación con un punto fijo de referencia denominado polo, el cual es análogo al origen en el sistema cartesiano. El eje de referencia desde el cual se mide la coordenada angular se denomina eje polar, ver Figura 2.5.

Figura 2.5 Coordenadas polares



Fuente: Elaboración propia

Convenciones:

1. Los ángulos positivos ($\theta > 0$) se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj partiendo del eje polar, en tanto que los ángulos negativos ($\theta < 0$) se miden en el mismo sentido a las manecillas.

2. Para ubicar un punto (-r, θ), -r < 0, se miden |r| unidades a lo largo del rango $\theta + \pi$.

3. Las coordenadas del polo son $(0,\theta)$; θ es cualquier ángulo.

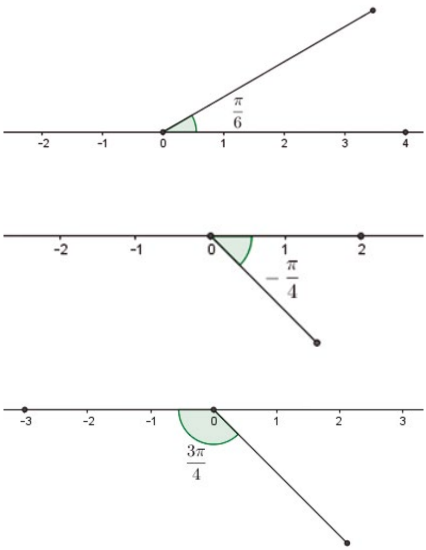
Ejemplo 2.5. Localizar los siguientes puntos en el plano polar, cuyas coordenadas polares son:

a. $\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$ b. $\left(2,-\frac{\pi}{4}\right)$ c. $\left(-3,\frac{3\pi}{4}\right)$

Solución: en coordenadas polares la representación de un punto en el plano polar no es única, (-r, θ) y (-r, $\theta + 2\pi n$) coinciden para $n \in Z$ o son equivalente mientras que en coordenadas rectangulares si es única.

Vea en la Figura 2.6 la representación de los puntos dados en los literales a, b y c.

Figura 2.6 Puntos en el plano polar del Ejemplo 2.5.



Fuente: Elaboración propia

2.3.2 CONVERSIÓN DE COORDENADAS POLARES A RECTANGULARES

Las coordenadas polares (r, θ) pueden ser convertidas a coordenadas rectangulares (*x*,*y*), usando la relación de Pitágoras y las relaciones trigonométricas sobre un triángulo rectángulo, ver Figura 2.7.

Considere:

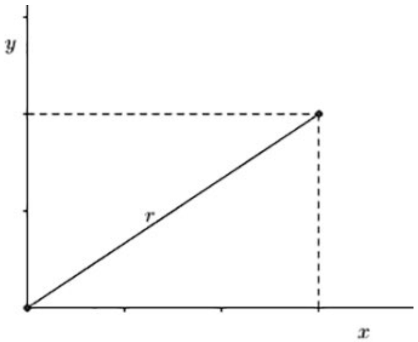
$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\text{sen}\theta \qquad (2.36)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} y/x$$

Figura 2.7 Conversión de coordenadas polares a rectangulares



Fuente: Elaboración propia

Convierta $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ de coordenadas polares a rectangulares.

$$y = 2\text{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow y = 1$$

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$P(\sqrt{3},1) \qquad (2.37)$$

$$(-1{,}1)$$
$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) \Rightarrow \theta = -45;\ \theta = -\frac{\pi}{4}$$
$$\left(\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4}\right)$$

Usando el cambio de coordenadas, una ecuación cartesiana puede expresarse a menudo como una ecuación polar $r = f(\theta)$.

Ejemplo 2.6.

1. Determinar una ecuación polar que tenga la misma gráfica que: $x^2 + y^2 = 4y$.

Solución:

$$x2 + y2 = 4y$$
$$(rcos\theta)^2 + (rsen\theta)^2 = 4(rsen\theta)$$
$$r^2\ (cos^2\theta + r^2\ (sen^2\theta) = 4rsen\theta$$
$$r2 = 4rsen\theta \qquad (2.38)$$
$$6r^2 - 4rsen\theta = 0 \Rightarrow r(r - 4sen\theta) = 0$$
$$r = 0 \text{ o } r = 4sen\theta)$$

2. Obtener una ecuación polar que tenga la misma gráfica que: $x^2 = 8(2 - y)$.

Solución:

$$r^2cos^2\theta = 8(2 - rsen^2\ \theta)$$
$$r^2\ (1 - sen^2\ \theta) = 16 - 8rsen\theta$$
$$r^2 = (rsen\theta)^2 - 8rsen\theta + 16 \qquad (2.39)$$
$$r = (rsen\theta\text{-}4)^2$$

Ejemplo: 2.7. Determine la ecuación en coordenadas cartesianas de la curva en coordenadas polares $r^2 = 9\cos2\theta$

Solución: como se tiene que:

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \text{ y } sen\theta = \frac{y}{r}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad (2.40)$$

Reemplazando obtenemos:

$$x^2 + y^2 = 9(\cos^2\theta - sen^2\theta)$$

$$x^2 + y^2 = 9\left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}\right)$$

$$x^2 + y^2 = 9\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2) \qquad (2.41)$$

2.3.3 EJERCICIOS

1. Convierta de coordenadas polares a coordenadas rectangulares los siguientes puntos:

   a. $\left(\frac{3\pi}{2}, 3\right)$

   b. $\left(-\frac{\pi}{4}, 5\right)$

   c. (0,4)

2. Convierta de coordenadas rectangulares a coordenadas polares los siguientes puntos:

   a. (-2,2)

   b. (3,4)

   c. (0,-4)

3. Determinar una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la curva en coordenadas rectangulares:

   a. $4x2 + 9y^2 = 36$

   b. $y = 3x - 1$

   c. $y = x^2 - 2$

4. Determinar una curva en coordenadas rectangulares que tenga la misma gráfica que la curva en coordenadas polares:

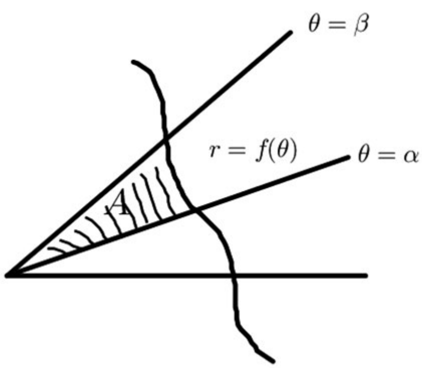
   a. $r = 4$

   b. $r = 4\cos\theta$

   c. $r^2 = 2sen\theta - 1$

2.4 ÁREA EN COORDENADAS POLARES

Figura 2.8 Área en coordenadas polares



Fuente: Zill (2012) Elaboración propia

El área de un sector circular es dada por $A_0 = \frac{1}{2}\theta r^2$. Se tiene que el área de la curva en coordenadas polares entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ viene dada por la suma de las áreas de los k-ésimos sectores circulares, ver Figura 2.8.

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \Delta\theta_k \, . \, r^2 \tag{2.42}$$

$$\Delta\theta_k \to 0$$

$$A = \lim_{\Delta\theta_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \Delta\theta_k . r^2$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(\theta)\right)^2 . \, d\theta$$

2.4.2 LONGITUD DE ARCO PARA GRÁFICAS POLARES

En este apartado abordaremos el concepto de longitud de arco de una curva en coordenadas polares, recordemos que la curva en coordenadas cartesianas viene dada por:

$$x = f(t) \text{ y } y = g(t) \tag{2.43}$$

Y la longitud de arco viene dada por:

$$S = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt \tag{2.44}$$

Supongamos que f'(θ) tiene derivada continua y $\alpha \leq \theta \leq \beta$, dada una curva parametrizada y $r = f(\theta)$ se tienen las siguientes relaciones:

$$x = r\cos\theta \; ; \; y = r sen\theta$$
$$x = f(\theta)\cos\theta \mid y = f(\theta) sen\theta \tag{2.45}$$

Derivando x y y con respecto a θ obtenemos:

$$\frac{dx}{d\theta} = (f(\theta)\cos\theta)' \mid \frac{dy}{d\theta} = (f(\theta)sen\theta)'$$
$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\text{sen}\,\theta \; \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\text{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta \tag{2.46}$$

Sumando $\frac{dx}{d\theta}$ y $\frac{dy}{d\theta}$ y elevando al cuadrado:

$$\begin{aligned}
&(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2 \\
&=(f'\theta)\cos\theta - f(\theta)sen\theta)^2 + (f'(\theta)sen\theta + f(\theta)\cos\theta)^2 \\
&=(f'(\theta))^2\cos^2\theta - 2f'(\theta)f(\theta)\cos\theta sen\theta+(f(\theta))^2 \text{ sen}^2\,\theta \\
&+ (f'(\theta))^2 \text{ sen}^2\,\theta + 2f'(\theta)f(\theta)\cos\theta sen\theta+(f(\theta))^2\cos^2\theta \\
&=(f\text{^'}(\theta))^2+(f(\theta))^2
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Así, obtenemos la longitud de arco en coordenadas polares:

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta \tag{2.48}$$

Ejemplo 2.8. Determine la longitud de la curva relacionada a continuación:

$r = 2 - 2\cos\theta$

$0 \leq \theta \leq \pi)$

Solución: en efecto, usando la fórmula de la longitud de arco en coordenadas polares tenemos:

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{d}{d_\theta}(2-2\cos\theta)\right)^2 + (2-2\cos\theta)^2}\,.\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{(2\text{sen}\,\theta)^2 + (2-2\cos\theta)^2}\,.\,d\theta$$

(2.49)

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{4sen^2\theta + 4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta}\,.\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{4(sen^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)}\,.\,d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos^2\theta}\,.\,d_\theta$$

$$= 2\int^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\,.\,d\theta = 2\sqrt{2}\int^{\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\,.\,d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2sen\frac{\theta}{2}}\,.\,d\theta = 2\sqrt{2}\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{sen^2\frac{\theta}{2}}\,.\,d\theta$$

Integrar: Sea $u = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2} \Rightarrow d\theta = 2du$

$$S = 8\int_0^{\pi} senu\,.\,du$$

$$S = 8(-\cos u)]_0^{\pi} \qquad (2.50)$$

$$S = \left[-8\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} \Rightarrow [(-8\cos\frac{\pi}{2}) - (-8\cos 0)] = 8$$

2.4.3 EJERCICIOS

1. Calcule el área encerrada por la curva r = 4, con $0 \leq \theta \leq \pi$
2. Determine el área encerrada por la curva $r^2 = 9\cos\theta$, con $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$
3. Determine el área encerrada por la curva $r = 2\cos 3\theta$, con $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$
4. Determine el área encerrada por la curva $r = 2 - 2sen\theta$, con $0 \leq \theta \leq$

5. Determine la longitud de las curvas relacionadas a continuación:

   a. $r = 3 - 3\text{sen}\theta$
      $0 \leq \theta \leq 2\pi$

   b. $r = 2\cos\theta$
      $0 \leq \theta \leq$

2.5. FUNCIONES VECTORIALES Y CURVAS EN EL ESPACIO. DERIVADAS E INTEGRALES DE FUNCIONES VECTORIALES

2.5.1. FUNCIONES VECTORIALES

Definición 2.4. (Curva parametrizada). Sabemos que una curva C en el plano xy se puede parametrizar por medio de $x = f(t)$ $y = g(t)$, con $a \leq t \leq b$, es común representarla como sigue:

$$r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} \tag{2.51}$$

Se dice que una función vectorial en $\mathbb{R}^3$ puede ser parametrizada como:

$$r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}} \tag{2.52}$$

Para cierto número dado t_0, el vector $r(t_0)$ es el vector de posición de un punto P de la curva C.

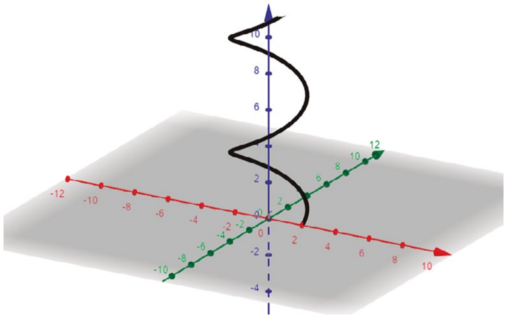
Ejemplo 2.9. Trazar la gráfica correspondiente a las siguientes funciones vectoriales.

1. $r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}; t \geq= 0$
2. $r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$

Solución:

1. La gráfica de la función vectorial $r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$, para $t \geq = 0$, se presenta en la Figura 2.9.

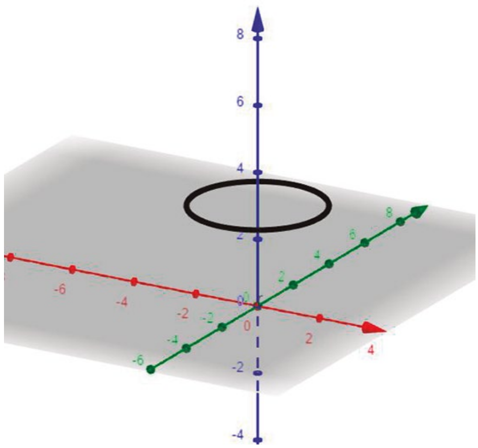
Figura 2.9 Gráfica de la curva $r(t) = 2cos\, t\hat{\boldsymbol{i}} + 2sent\hat{\boldsymbol{j}} + t\hat{\boldsymbol{k}}$



Fuente: Zill (2012). Elaboración propia

2. La gráfica de la función vectorial $r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, se presenta en la Figura 2.10.

Figura 2.10 Gráfica de la curva $r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$



Fuente: Elaboración propia

2.5.2. CÁLCULO DE FUNCIONES VECTORIALES

Abordaremos los conceptos fundamentales del cálculo de funciones vectoriales, consideremos que los siguientes límites si existen: $\lim_{t\to a} f(t)$, $\lim_{t\to a} g(t)$ y $\lim_{t\to a} h(t)$ y que $r(t)$ = (f (t) ,$\boldsymbol{g}$ (t), $h(t)$) entonces para establecer el límite de una función vectorial lo evaluamos como sigue:

$$\lim_{t\to a} r(t) = \left(\lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t)\right) \tag{2.53}$$

Teorema 2.1. Si $\lim_{t\to a} r_1(t) = L_1$ y $\lim_{t\to a} r_2(t) = L_2$ entonces se cumple que:

a. $\lim_{t\to a} c r_1(t) = cL_1$, donde c es un escalar.

b. $\lim_{t\to a} [r_1(t) + r_2(t)] = L_1 + L_2$

c. $\lim_{t\to a} [r_1(t). r_2(t)] = L_1. L_2$

Definición 2.5. (Función continua). Se dice que una función vectorial r es continua en un número si:

a. $r(a)$ está definida.

b. $\lim_{t\to a}$ r(t) existe.

c. $\lim_{t\to a}$ r(t)=r(a)

De forma equivalente, $r(t)$ es continua en un número a si y solo si las componentes f, g y h son continuas en **a**.

2.5.3. DERIVADAS DE FUNCIONES VECTORIALES

Definición 2.6. (Derivada). La derivada de una función vectorial r se define como:

$$r'(t) = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[r(t + \Delta t) - r(t)] \tag{2.54}$$

Teorema 2.2. Si $r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$ donde *f*, *g* y *h* son diferenciales, entonces:

$$r'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t)) \tag{2.55}$$

2.5.4. CURVAS ALISADAS

Definición 2.7. (Función alisada). Se dice que *r* es una función alisada y la curva descrita por r es una curva alisada. Si *r* tiene las primeras derivadas continuas y $r'(t) \neq 0$, para todo *t* en un intervalo *I*.

Ejemplo 2.10. Obtener ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva C_1 cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = t^2,\ y = t^2 - t,\ z = -7t;\ \text{en } t = 3,\ t = 7$$

Solución: la recta tangente a la curva determinada por $r(t) = (t^2, t^2 - t, -7t)$, en el punto P_0, es la recta paralela a $r'(t_0)$ que pasa por P_0 es $P_0 + tr'(t_0)$.

Luego, en t = 3, t = 7 tenemos:

$$\begin{aligned} r(3) &= (3,6,-21)\\ r(7) &= (49,42,-49)\\ r'(t) &= (2t,2t-1,-7)\\ r'(3) &= (6,5,-7)\\ r'(7) &= (14,13,-7)\ ) \end{aligned} \tag{2.56}$$

Para $t = 3$, la recta tangente a la curva pasa por $P_0 = (3,6,-21)$ y es paralela a $r'(3) = (6,5,-7)$ es:

$$L_1 : \{x = 3 + 6t;\ y = 6 + 5t;\ z = -21 - 7t\} \tag{2.57}$$

Para $t = 7$, la recta tangente a la curva pasa por $P_0 = (49,42,-49)$ y es paralela a $r'(7) = (14,13,-7)$ es:

$$L_1 : \{x = 49 + 14t;\ y = 42 + 13t;\ z = -49 - 7t\} \tag{2.58}$$

Definición 2.8. (Derivadas de orden superior). Las derivadas de orden superior se obtienen derivando sus componentes esto es:

$$r^{(t)} = (f''^{(t)}, \boldsymbol{g}''^{(t)}, h''^{(t)})$$

$$r^{(t)} = (f'''^{(t)}, \boldsymbol{g}'''^{(t)}, h'''^{(t)})$$

$$r^n(t) = (f^n(t), \boldsymbol{g}^n(t), h^n(t)) \tag{2.59}$$

Teorema 2.3. (Regla de la cadena). Si *r* es una función vectorial diferenciable y *s*=*u*(*t*) es una función escalar diferenciable entonces la derivada de *r*(*s*) con respecto a t es:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = r'(s)u'(t) \tag{2.60}$$

Ejemplo 2.11. Aplicar la regla de la cadena para encontrar *r*'(*t*) si:

$$r(s) = \cos 2s\hat{\mathbf{i}} + sen2s\hat{\mathbf{j}} + e^{3s}\hat{\mathbf{k}}\ y\ s = t^4$$

Solución: podemos escribir r(t) de la siguiente forma:

$$r(t) = (\cos(2t^4), \text{sen}(2t4), e^{3t4} \tag{2.61}$$

Así:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= r'(s)u'(t) = (-2sen(2u), 2co\,s(2u), 3e^{3u})4t^3 \\ &= \left(-8t^3 sen(2t^4), 8t^3 \cos 2t^4, 12t^3 e^{3t^4}\right)\end{aligned} \tag{2.62}$$

Teorema 2.4. Sean r_1, r_2 funciones vectoriales diferenciables y u(t) una función escalar diferenciable, entonces:

- $\frac{d}{dt}[r_1(t) + r_2(t)] = r_1'(t) + r_2'(t)$
- $\frac{d}{dt}[u(t)r_1(t)] = u(t)r_1'(t) + u'(t)r_1(t)$

- $\frac{d}{dt}[r_1(t).r_2(t)] = r_1(t)r_2{}'(t) + r_1{}'(t)r_2(t)$

- $\frac{d}{dt}[r_1(t) \times r_2(t)] = r_1(t) \times r_2{}'(t) + r_1{}'(t) \times r_2(t)$

2.5.5. INTEGRALES DE FUNCIONES VECTORIALES

Definición 2.9. (Integral de una función). Si *f*, ***g*** y *h* son funciones integrables, entonces las integrales indefinidas y definidas de una función vectorial $r(t) = f(t)\,\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$ se definen respectivamente como:

$$\begin{aligned} \int r(t)\ dt &= \int f(t)\ dt\hat{\mathbf{i}} + \int g(t)\ \mathrm{d}t\hat{\mathbf{j}} + \int h(t)\ \mathrm{d}t\hat{\mathbf{k}} \\ \int_a^b r\,(t).\,dt &= \int_a^b f\,(t).\,dt\hat{\mathbf{i}} + \int_a^b g\,(t).\,dt\hat{\mathbf{j}} + \int_a^b h\,(t).\,dt\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{2.63}$$

La integral definida de $r(t)$ es otro vector $R(t) + C$ tal que $R'(t) = r(t)$.

Ejemplo 2.12. Obtener la integral indefinida para:

$$r(t) = 6t^2\,\hat{\mathbf{i}} + 4e^{-2t}\,\hat{\mathbf{j}} + 8\cos 4t\hat{\mathbf{k}}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \int r(t).\,dt &= 6\int t^2.\,dt\hat{\mathbf{i}} + 4\int e^{-2t}.\,dt\hat{\mathbf{j}} + 8\int \cos 4t.\,dt\hat{\mathbf{k}} \\ \int r(t).\,dt &= (\frac{6}{3}t^3 + C_1, \frac{-4}{2}e^{-2t} + C_2, \frac{8}{4}sen4t + C_3) \\ \int r(t).\,dt &= (2t^3 + C_1, -2e^{-2t} + C_2, 2sen4t + C_3) \end{aligned} \tag{2.64}$$

2.5.6. EJERCICIOS

1. Trazar la gráfica correspondiente a las siguientes funciones vectoriales usando GeoGebra.

   a. $r(t) = \cos(2t)\hat{\mathbf{i}} + sen(2t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}};\ t \geq 0$

   b. $r(t) = 4\cos t\hat{\mathbf{i}} + 4sent\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$

   c. $r(t) = t\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}} + t^2\hat{\mathbf{k}}$

2. Calcular los siguientes límites de las siguientes funciones vectoriales, si existen:

   a. $\lim_{t \to 2} \left[(t^2 - 2)\hat{\mathbf{i}} + (3t + 1)\hat{\mathbf{j}} + e^t \hat{\mathbf{k}} \right]$

   b. $\lim_{t \to 0} \left[\frac{sent}{t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{(1 - \cos t)}{t}\hat{\mathbf{j}} + (1 + t)^{\frac{1}{t}}\hat{\mathbf{k}} \right]$

   c. $\lim_{t \to \infty} \left[\frac{(t^2 - 2t)}{(2t^2 + 3)}\hat{\mathbf{i}} + (5t^{-3} + 2))\hat{\mathbf{j}} + e^{\frac{-1}{t}}\hat{\mathbf{k}} \right]$

3. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva C_1 cuyas ecuaciones paramétricas son:

   $x = t$, $y = 4t^2 + 3$, $z = t + 1$; en $t =$ -2; $t = 3$

4. Aplicar la regla de la cadena para encontrar r'(t) si:

   a. $r(s) = \cos s\hat{\mathbf{i}} + sens\hat{\mathbf{j}} + s^3\hat{\mathbf{k}}\ y\ s = e^{2t}$

   b. $r(s) = \cos^2(s)\hat{\mathbf{i}} + sen^2(s)\hat{\mathbf{j}} + ln(s)\hat{\mathbf{k}}\ y\ s = 2t^5$

5. Si $r_1(t) = \cos t\hat{\mathbf{i}} + sent\hat{\mathbf{j}} + t^2\hat{\mathbf{k}}$; $r_1(t) = t\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}} + t^3\hat{\mathbf{k}}$; $u(t) = e^{2t}$. Determine las siguientes derivadas:

   a. $\frac{d}{dt}[r_1(t) + r_2(t)]$

   b. $\frac{d}{dt}[u(t)r_1(t)]$

   c. $\frac{d}{dt}[r_1(t).r_2(t)]$

   d. $\frac{d}{dt}[r_1(t) \times r_2(t)]$

6. Calcule la integral indefinida de las siguientes funciones vectoriales:

   a. $r(t) = 4t^3\hat{\mathbf{i}} + 5e^{6t}\hat{\mathbf{j}} + \cos(t)\hat{\mathbf{k}}$

   b. $r(t) = e^{2t}\hat{\mathbf{i}} + te^{2t}\hat{\mathbf{j}} + t^2e^{2t}\hat{\mathbf{k}}$

2.6. LONGITUD DE ARCO Y CURVATURA. MOVIMIENTO EN EL ESPACIO, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

2.6.1 LONGITUD DE UNA CURVA EN EL ESPACIO

Definición 2.10. (Longitud de una curva alisada). Si $r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$ es una función alisada, la longitud de la curva alisada está dada por:

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2 + \left(h'(t)\right)^2}\, dt = \int_o^b |r'(t)|\, dt \qquad (2.65)$$

Ejemplo 2.13. Encuentre la longitud de la curva.

$$r(t) = 2\cos t\, \hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}};\ 0 \leq t \leq 3$$

Solución:

$$\begin{aligned} &r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}} \\ &f'(t) = -\,2sent \\ &g'(t) = 2cost \\ &h'(t) = 1 \end{aligned} \qquad (2.66)$$

Luego, la longitud de la curva viene dada por:

$$\begin{aligned} &S = \int_0^3 \sqrt{(-2sent)^2 + (2\cos t)^2 + 1^2}\, dt \\ &S = \int^3 \sqrt{4(sen^2 t + \cos^2 t) + 1}\, dt \\ &S = \int_0^3 \sqrt{5}\, dt \\ &S = [\sqrt{5}t]_0^3 = [\sqrt{5}(3)] - 0 = 6{,}71u \end{aligned} \qquad (2.67)$$

Ejemplo 2.14. Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una hélice circular en $\mathbb{R}^3$ de tal modo que su vector posición en el tiempo t es $r(t)=(4\cos\pi)\hat{\mathbf{i}}+(4sen\pi t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$ encuentre la distancia recorrida y el desplazamiento de la partícula durante el intervalo $1 \leq t \leq 5$

Solución: tenemos que la curva es:

$$r(t) = (4\cos\pi t)\hat{\mathbf{i}} + (4sen\pi t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$$

$$f'(t) = -4\pi sen(\pi t)$$

$$\boldsymbol{g}'(t) = 4\pi\cos(\pi t) \tag{2.68}$$

$$h'(t) = 1$$

Luego, la longitud de la curva viene dada por:

$$S = \int_1^5 \sqrt{(-4\pi sen(\pi t))^2 + (4\pi cos(\pi t))^2 + 1}\,dt \tag{2.69}$$

$$= \int_1^5 \sqrt{16\pi^2 sen^2(\pi t) + 16\pi^2 cos^2(\pi t) + 1}\,dt = \int_1^5 \sqrt{16\pi^2(1) + 1}\,dt$$

$$= 50{,}43$$

2.6.2. MOVIMIENTO SOBRE UNA CURVA

Definición 2.11. (Velocidad y aceleración). Supongamos que una partícula describe una trayectoria C y su posición está indicada por:

$$r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + \boldsymbol{g}(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}} \tag{2.70}$$

Donde t es el tiempo. Si f, $\boldsymbol{g}$ y h tienen segunda derivada, entonces la velocidad está dada por:

$$v(t): r'(t) = f'(t)\hat{\mathbf{i}} + g'(t)\hat{\mathbf{j}} + h'(t)\hat{\mathbf{k}} \tag{2.71}$$

Y la aceleración por:

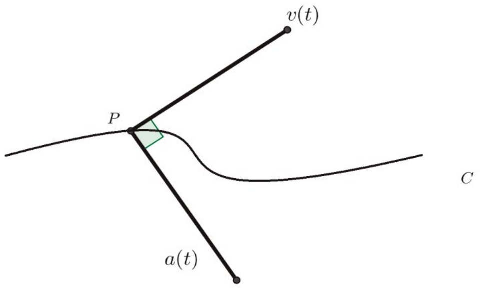
$$a(t): r''(t) = f''(t)\hat{\mathbf{i}} + g''(t)\hat{\mathbf{j}} + h''(t)\hat{\mathbf{k}} \tag{2.72}$$

Ver Figura 2.11.

La rapidez de la partícula es una función escalar: $v = |v(t)|$ o $s'(t) = |v(t)|$ dado que:

$$S = \int_{to}^{t} |v(t)|\,dt \tag{2.73}$$

Figura 2.11 Movimiento sobre una curva



Fuente: Elaboración propia

Si una partícula se mueve con rapidez constante C entonces su vector aceleración es perpendicular al vector velocidad.

$$v^2 = |v|^2 = c^2 \Rightarrow v.v = c.c \tag{2.74}$$

Si derivamos ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$v\frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dt}v = 0 \Rightarrow 2v\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v(t).\,a(t) = 0 \tag{2.75}$$

Ejemplo 2.15. Trace los vectores velocidad y aceleración para $t = \frac{\pi}{4}$ si la partícula se mueve a través de $r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$.

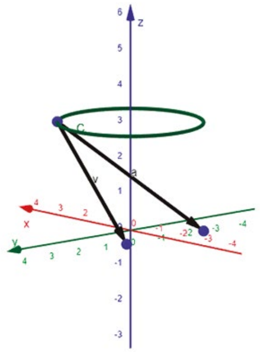
Solución: las derivadas de las componentes de la curva $r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2sent \Rightarrow f''(t) = -2\cos t \\ g'(t) &= 2\cos t \Rightarrow g''(t) = -2sent \\ h'(t) &= 0 \Rightarrow h''(t) = 0 \end{aligned} \tag{2.76}$$

Luego los vectores velocidad y aceleración de la curva $r(t)$, ilustrados en la Figura 2.12, están dados por:

$$\begin{aligned} r\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 2\cos\frac{\pi}{4}\hat{\mathbf{i}} + 2sen\frac{\pi}{4}\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\right) \\ v\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right) \\ a\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\right) \end{aligned} \tag{2.77}$$

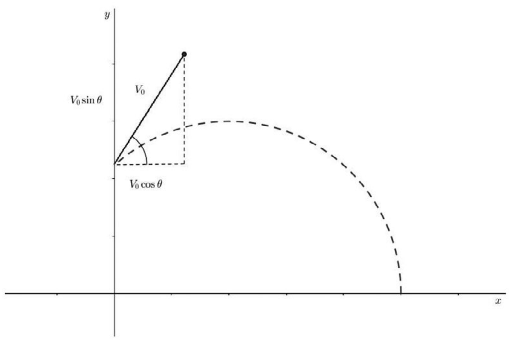
Figura 2.12 Gráfica de los vectores del Ejemplo 2.15



Fuente: Elaboración propia

2.6.3. MOVIMIENTO CURVILÍNEO EN EL PLANO

Figura 2.13 Movimiento curvilíneo en el plano



Fuente: Elaboración propia

Consideramos la aceleración de la gravedad expresada con forma vectorial como $a(t) = -g\hat{\mathbf{j}}$. El proyectil se lanza con una velocidad inicial: $V_0 = V_0 sen\theta\hat{\mathbf{j}} + V_0 \cos\hat{\mathbf{i}}$, desde una altura $S_0 = S_0\mathbf{j} + 0\mathbf{i}$, ver Figura 2.13.

Integrando ɑ(t) con respecto a t, tenemos:

$$\begin{aligned} V(t) &= \int a(t).dt = -\int g.d_t = -gt\hat{\mathbf{j}} + C_1 = V_{CD} \\ V(0) &= C_1, V(t) = (-gt + (V_0 sen\theta)\hat{\mathbf{j}} + V_0 \cos\theta\hat{\mathbf{i}} \end{aligned} \qquad (2.78)$$

Ahora, integrando V(t) respecto a t, tenemos:

$$\begin{aligned} r(t) &= \int (-gt + V_0 sen\theta).dt\hat{\mathbf{j}} + \int V_0 \cos\theta.dt\hat{\mathbf{i}} \\ r(t) &= (-\frac{1}{2}gt^2 + V_0 sen\theta t)\hat{\mathbf{j}} + V_0 \cos\theta t\hat{\mathbf{i}} + C_2 \end{aligned} \tag{2.79}$$

Dado que $r(0) = S_0\hat{\mathbf{j}}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} r(t) &= (-\frac{1}{2}gt^2 + V_0 sen\theta t + S_0)\hat{\mathbf{j}} + V_0 \cos\theta t\hat{\mathbf{i}} \\ x(t) &= V_0 \cos\theta t \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 sen\theta t + S_0 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Si derivamos *t*, *y* la igualamos a *0*.

$y'(t) = 0 \Rightarrow t_* \rightarrow$ (punto crítico donde la función se hace máxima) tiempo en alcanzar su altura máxima.

$y(t) = 0 \Rightarrow t_* \rightarrow$ (alcance máximo) tiempo en que se tarda en llegar al final.

Ejemplo 2.16. Un proyectil es lanzado desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de $768\frac{pies}{seg}$ y con un ángulo de elevación de 30°. Determine: la función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil.

Solución: como el proyectil es lanzado desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de $768\frac{pies}{seg}$ y con un ángulo de elevación de 30^∘,tenemos que el vector velocidad inicial es:

$$V_0 = (768\frac{ft}{s})\cos 30°\hat{\mathbf{i}} + (768\frac{ft}{s})sen30°\hat{\mathbf{j}} = 384\sqrt{3}\hat{\mathbf{i}} + 384\hat{\mathbf{j}} \tag{2.81}$$

Luego, los vectores aceleración, velocidad y posición serían, respectivamente:

$$a(t) = -g = -32\hat{\mathbf{j}}\frac{ft}{s}$$

$$V(t) = \int a(t).dt = -32t\hat{\mathbf{j}} + C_1 = (-32t + 384)\hat{\mathbf{j}} + 384\sqrt{3}\hat{\mathbf{i}}$$

$$r(t) = \int V(t).dt = (-16t^2 + 384t)\hat{\mathbf{j}} + 384\sqrt{3}t\hat{\mathbf{i}} \tag{2.82}$$

Siendo $x(t) = 16t^2 + 384t$ y $y(t) = 384\sqrt{3}t$

2.6.4. COMPONENTES DE LA ACELERACIÓN CURVATURA. VECTOR TANGENTE UNITARIO Y VECTOR NORMAL UNITARIO

Definición 2.12. (Vector tangente unitario). Sea C una curva dada por $r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$, donde f, $\boldsymbol{g}$ y h tienen segundas derivadas, si $|r'(t)| \neq 0$ en el punto P de C. Se define el vector tangente unitario en P:

$$T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} \tag{2.83}$$

Sabemos que $V(t) = r'(t)$ y la rapidez es $\frac{ds}{dt} = r = |V(t)| = |r'(t)|$ entonces:

$$V(t) = \mathrm{r} \cdot T \tag{2.84}$$

Es igual a la rapidez por el vector tangente unitario.

Si derivamos la velocidad tenemos:

$$V'(t) = a(t) = V.\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}}.T \tag{2.85}$$

Ahora si derivamos $T.T = \mathrm{C}$

$$\frac{d(T.T)}{dt} = T.\frac{dT}{dt} + \frac{dT}{dt}.T = 0 \tag{2.86}$$

T y $\frac{dT}{dt}$ son ortogonales.

$$2T.\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow T.\frac{dT}{dt} = 0 \tag{2.87}$$

Si $\left|\frac{dT}{dt}\right| \neq 0$, el vector:

$$N = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|} \Rightarrow \left|\frac{dT}{dt}\right| N = \frac{dT}{dt} \tag{2.88}$$

Es el vector normal unitario de la curva C en P con dirección dado por $\frac{dT}{dt}$.

Si definimos $k = \frac{\left|\frac{dT}{dt}\right|}{\frac{ds}{dt}}$ como la norma de la derivada del vector tangente/rapidez.

Entonces:

$$k\frac{ds}{dt} = \left|\frac{dT}{dt}\right| \Rightarrow kr = \left|\frac{dT}{dt}\right| \tag{2.89}$$

Ahora:

$$\frac{dT}{dt} = kV.N \tag{2.90}$$

Así, la aceleración se convierte en:

$$a(t) = kV^2N + \frac{dv}{dt}T \tag{2.91}$$

La función escalar k se denomina curvatura de la curva C en P. Así, $a(t) = a_N N + a_T$ T, vemos que el vector aceleración a es la resultante de dos vectores ortogonales a_N N y a_T T. Las funciones escalares $a_T \frac{dT}{dt}$ y $a_N = KV^2$ se llaman componentes tangencial y normal de la aceleración.

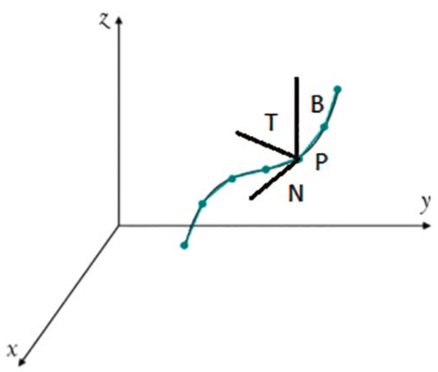
La curvatura es la magnitud de la razón de cambio del vector tangente unitario con respecto a la longitud de arco.

$$k = \left|\frac{dT}{dt}.\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{dT}{ds}\right| \tag{2.92}$$

2.6.5. VECTOR BINORMAL UNITARIO

Definición 2.13. (Vector binormal). Se define B = T × N, y recibe el nombre de vector binormal B, donde T y N son mutuamente ortogonales y son ortogonales a B, ver Figura 2.14.

Figura 2.14 Vector binormal unitario



Fuente: Elaboración propia

El plano determinado por T y N se denomina plano oscilador.

El plano determinado por N y B se llama plano normal, mientras que el plano determinado por T y B se llama plano rectificador.

Ejemplo 2.17. La posición de una partícula móvil está dada por:

$$r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3t\hat{\mathbf{k}} \tag{2.93}$$

Encuentre los vectores tangentes, normal y binormal T, N y B respectivamente de la curva dada, y determine su curvatura.

Solución: tenemos que:

$$r'(t) = -2sent\hat{\mathbf{i}} + 2co\,s\,t\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}} \tag{2.94}$$

Luego:

$$\begin{aligned} |r'(t)| &= \sqrt{(-2cos\,t)^2 + (2sent)^2 + 3^2} = \sqrt{4sen^2t + 4\cos^2 t + 9} \\ &= \sqrt{4(sen^2t + \cos^2 t) + 9} = \sqrt{13} \end{aligned} \tag{2.95}$$

Luego el vector tangente T es:

$$\begin{aligned} T &= \frac{-2sent\hat{\mathbf{i}} + 2\mathrm{co\,s}\,t\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{13}} \\ T &= \frac{-2sent\hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{13}} + \frac{2\mathrm{co\,s}\,t\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{13}} + \frac{3\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{13}} \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{-2}{\sqrt{13}}\mathrm{co\,s}\,t\hat{\mathbf{i}} - \frac{2}{\sqrt{13}}\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} \\ \left|\frac{dT}{dt}\right| &= \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\mathrm{co\,s}\,t\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}sent\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4}{13}\cos^2 t + \frac{4}{13}sen^2t} \\ &= \sqrt{\frac{4}{13}(sen^2t + \cos^2 t)} = \sqrt{\frac{4}{13}} \end{aligned} \tag{2.96}$$

De lo anterior, tenemos que el vector normal N:

$$\begin{aligned} N &= \frac{\frac{-2}{\sqrt{13}}\cos t\hat{\mathbf{i}} - \frac{2}{\sqrt{13}}sent\hat{\mathbf{j}}}{\frac{4}{\sqrt{13}}} \\ N &= \frac{\frac{-2}{\sqrt{13}}\cos t\hat{\mathbf{i}}}{\frac{4}{\sqrt{13}}} - \frac{\frac{2}{\sqrt{13}}sent\hat{\mathbf{j}}}{\frac{4}{\sqrt{13}}} \\ N &= -\cos t\hat{\mathbf{i}} - sent\hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \tag{2.97}$$

Por tanto, el vector binormal B será:

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{-2sent}{\sqrt{13}} & \frac{2\cos t}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\cos t & -sent & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}} sent\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{\sqrt{13}} \cos t\hat{\mathbf{j}} + (\frac{2sen^2 t}{\sqrt{13}} + \frac{2\cos^2 t}{\sqrt{13}})\hat{\mathbf{k}} \tag{2.98}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}} sent\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{\sqrt{13}} \cos t\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{\sqrt{13}}\hat{\mathbf{k}}$$

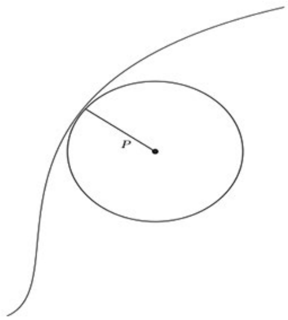
De igual forma, tenemos que la curvatura k es $k = \frac{\sqrt{\frac{4}{13}}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{13}$

2.6.6. RADIO DE CURVATURA

Definición 2.14. (Radio de curvatura). El recíproco de la curvatura k de una curva $r(t)$, $P = \frac{1}{k}$, se llama el radio de la curvatura de la curva $r(t)$.

El radio de la curvatura en punto P de una curva es el radio de la circunferencia que se ajusta de mejor forma a la curva, ver Figura 2.15.

Figura 2.15 Radio de curvatura



Fuente: Elaboración propia

Conociendo el radio de la curvatura, es posible determinar la rapidez V a la cual un auto puede tomar una curva inclinada sin que derrape.

Ejemplo 2.18. Si $r(t) = t\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}t^2\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}t^3\hat{\mathbf{k}}$ es el vector posición de una partícula móvil, determinar las componentes tangencial y normal de la aceleración para $t = \frac{\pi}{2}$ y encuentre la curvatura.

Solución: para establecer el vector velocidad y el vector aceleración establecemos la derivada del vector posición y lo evaluamos en $t = \frac{\pi}{2}$. Así, tenemos: $V(t) = i + tj + t^2k$ y $a(t) = j + 2tk$ evaluando $t = \frac{\pi}{2}$ en el vector velocidad y aceleración respectivamente tenemos: $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = i + \frac{\pi}{2}j + \frac{\pi^2}{4}k$ y $a\left(\frac{\pi}{2}\right) = j + \pi k$. Finalmente se debe construir el vector binormal en $t = \frac{\pi}{2}$, decir la curvatura corresponde a la magnitud de la razón de cambio del vector tangente unitario T con respecto a la longitud de arco, queda para el lector poder establecerlo.

Recuerde que el vector tangente T unitario se define como $T = \frac{V(t)}{\|V(t)\|}$ y la curvatura $\kappa = \| \frac{dT}{ds} \|$

2.6.7. EJERCICIOS

1. Encuentre la longitud de la curva $r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}} t \geq 0$ para $0 \leq t \leq 3$

2. Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una hélice circular en $\mathbb{R}^3$ de tal modo que su vector posición en el tiempo t es:

   $$r(t) = (4\cos\pi)\hat{\mathbf{i}} + (4sen\pi t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$$

   Encuentre la distancia recorrida y el desplazamiento de la partícula durante el intervalo $1 \leq t \leq 5$

3. Trace los vectores velocidad y aceleración para $t = \frac{\pi}{4}$, si la partícula se mueve a través $r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$

4. La posición de una partícula móvil está dada por:

   $$r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3t\hat{\mathbf{k}}$$

   Encuentre T, N y B, determine la curvatura.

5. Si $r(t) = t\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}t^2\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}t^3\hat{\mathbf{k}}$ es el vector posición de una partícula móvil, determinar las componentes tangencial y normal de la aceleración para $t = \frac{\pi}{2}$ y $t = \frac{\pi}{3}$..

3

CAPÍTULO 3

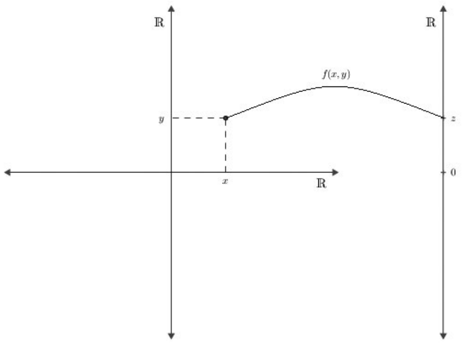
LÍMITE, CONTINUIDAD Y DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES EN VARIAS VARIABLES

En este apartado compartimos los fundamentos que nos permitirán analizar los conceptos de límites y continuidad, definir la derivada de una función en varias variables y sus aplicaciones.

3.1. FUNCIONES EN VARIAS VARIABLES

$$f:\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R} \mid f:\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}(x,y) \Rightarrow z = f(x,y) \mid (x,y,z) \Rightarrow w = f(x,y)$$

Figura 3.1 Función en varias variables

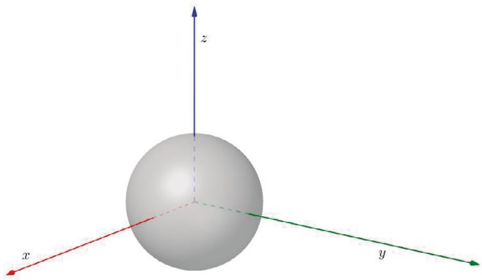


Fuente: Elaboración propia

Definición 3.1. (Función en dos variables). Una función en dos variables es una regla de correspondencia que asigna a cada pareja de números reales (x,y) de un subconjunto del plano uno y solo un número z en el conjunto de los números reales, ver Figura 3.1.

Es importante identificar que la gráfica de una función $z = f(x,y)$ corresponde a una superficie en el espacio tridimensional, vea un ejemplo en la Figura 3.2.

Figura 3.2 Gráfica de una superficie - esfera



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo: 3.1. A continuación, enunciamos algunas funciones en dos variables muy conocidas:

$f(x,y) = xy \Rightarrow$ área de un cuadrado.

$f(x,y) = 2x + 2y \Rightarrow$ perímetro de un cuadrado.

$f(r,h) = \pi r^2 h \Rightarrow$ volumen de un cilindro.

$f(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 h \Rightarrow$ volumen de un cono.

Una ecuación de un plano $ax + by + cz = d$ para $c \neq 0$, describe una función z $\frac{-ax}{c} - \frac{by}{c} + \frac{d}{c} \Rightarrow f(x,y) = \frac{-a}{c}x - \frac{b}{c}y + \frac{d}{c}$; $Domf = \mathbb{R}^2$

$z = f(x,y) = \pm\sqrt{9 - x^2 - y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$ $Dom(f) = \{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 9\}$

3.1.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Definición 3.2. (Límite de una función de dos variables). Sean $f(x,y)$ una función de valor real de dos variables reales (x,y) definida en el dominio D. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Si el valor de la función $f(x,y)$ se aproxima a un valor L cuando (x,y) se acerca al punto (a,b) entonces se nota:

$f(x,y) = L$, esto es $(x,y) \rightarrow (a,b)$

Dado ε > 0 cualquiera existe en un $d > 0$ tal que $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ siempre que: $|(x,y) - (a,b)| < 0$

$|(x,y) - (a,b)| = \sqrt{((x - a)^2 + (y - b)^2)}$, si la distancia de (x,y) a (a,b) tiende a cero decimos que el punto (x, y) se acerca hasta (a,b).

El valor $f(x,y)$ se aproxima a L, significa que la diferencia de los valores $|f(x,y)-L|$ pueden disminuir tanto como uno quiera.

$$|f(x,y) - L| \to 0 \qquad (3.1)$$

ε mide la pequeñez de la diferencia de los valores $f(x,y)$ y L.

δ: mide el acercamiento del punto (x,y) a (a,b).

Propiedades:

1. si:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L, \quad y \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$$

Entonces:

$$i. \lim_{(x\ y)\to(a\ b)} f(x,y) \pm g(x,y) = L \pm M$$

$$ii. \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).g(x,y) = L.M$$

$$iii. \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

2. Si existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (a,b)$, entonces el límite es único.

Ejemplo 3.2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (x,y) \to f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$; *si* $(x,y) \neq (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 \qquad (3.2)$$

Solución: dado ε > 0, veamos que existe δ > 0

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$$

$$0 \leq (x-y)^2$$

$$0 \leq x^2 - 2|xy| + y^2 \tag{3.3}$$

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$

$$\frac{|x \ \ y|}{{}^2 + {}^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = \frac{|x||xy|}{|x^2 + y^2|} \leq \frac{1}{2}|x| \tag{3.4}$$

Cuando (x,y) → (0,0) ⇒ L = 0

Ejemplo 3.3. Sea: f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$(x, y) \to f(x, y) = x \sin\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.5}$$

Con y ≠ 0 y ***g***: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \to \ g(x, y) = \frac{1}{x}\sin(xy) \tag{3.6}$$

Con x ≠ 0

Verifique:

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$

Solución: como $|\sin\left(\frac{y}{x}\right)| \leq 1$

Dado ε > 0 debe existir un δ > 0 tal que:

|f(x,y) - 0| < ε, cuando |(x,y) - (0,0)| <δ

$$\left|x \sin\left(\frac{y}{x}\right) - 0\right| < \varepsilon, \text{ cuando } \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

$$x \sin\left(\frac{y}{x}\right)| = |x|| \sin\left(\frac{y}{x}\right)| \leq |x|(1) \to 0$$

Cuando (x,y) → (0,0); $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$

$$x^2 + y^2 \geq 0$$
$$x^2 + y^2 = x^2$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x} \tag{3.8}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|$$

$$x^2 + y^2 \geq y^2$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(y^2)}$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq |y| \qquad (3.9)$$

Ahora:

$$|x\sin\frac{x}{y}| \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon = \delta$$

$$|\frac{\sin xy}{xy}| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\sin xy|}{|xy|} \leq 1$$

$$|sin(xy)| \leq |xy| \qquad (3.10)$$

$$|g(x,y) - 0| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{x}\sin xy\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{\sin xy}{x}\right| = \frac{|\sin(xy)|}{|x|}$$

| $$\frac{|\sin(xy)|}{|x|} \leq \frac{|x||y|}{|x|} \leq |y| \qquad (3.11)$$

Como ε tiende a *0* cuando (x,y) → (0,0), se tiene:

$$\frac{|\sin(xy)|}{|x|} \leq |y| \to 0 \text{ } cuando \text{ } (x, y) \to (0,0)$$

$$\frac{|\sin(xy)|}{|x|} \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon = \delta \qquad (3.12)$$

Ejemplo 3.4. Demostrar que:

i. si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} |f(x, y)| = |L|$

ii. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} |(x, y) - (c, d)| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$

iii. $\lim_{(x\ y)\to(1\ 1\ )} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}$

iv. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x. y = a. b$

Solución:

i. Sea:

$$f : \mathbb{R}^2 \to R$$
$$(x,y) \to f(x,y) \tag{3.13}$$

$$|f(x,y)| - |L| \leq |f(x,y) - L| \Rightarrow 0$$
$$cuando\ (x,y) \to (a,b) \tag{3.14}$$

ii.

$$|(x,y) - (c,d)| = |(x-c,y-d)| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} \to \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$
$$\text{cuando } (x,y) \to (a,b)$$

iii. Sea:

$$f: \mathbb{R}^2 \to R$$
$$(x,y) \to f(x,y) = \frac{1}{x+y} \tag{3.15}$$

Con $(x,y) \neq (0,0)$

Dado un ε >0 tal que, existe un δ > 0 tal que:

$$\left|\frac{1}{x+y} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \quad cuando \quad |(x,y) - (1,1)| < \delta$$

$$\left|\frac{1}{x+y}\right| = \frac{1}{x+y} \to \frac{1}{2} \quad Cuando \quad (x,y) \to (1,1)$$

iv. Es fácil ver que $xy \to ab$ *cuando* $(x,y) \to (a,b)$

Ejemplo 3.5. Mostrar que si $f : \mathbb{R}^2 \to R$

$$(x,y) \to f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \text{con } (x,y) \neq (0,0) \tag{3.16}$$

Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \tag{3.17}$$

Solución: dado ε > 0 existe δ > 0 tal que:

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right| < \varepsilon \text{ cuando } (x,y)-(0,0)|, \textit{luego}$$

$$\left.\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{|\sqrt{x^2+y^2}|} = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon \qquad (3.18)$$

$\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$, *haciendo* $\delta = \varepsilon$

Puesto que, para $x \geq 0$ y $y \geq 0$ entonces:

$$x^2 + y^2 \geq x^2 + 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \qquad (3.19)$$

Análogamente:

$$x^2 + y^2 \geq x^2 + 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| \qquad (3.20)$$

Ejemplo 3.6. Sea:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to R$$

$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (3.21)$$

Con $(x,y) \neq (0,0)$. Muestre que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \qquad (3.22)$$

Solución: dado ε > 0 existe δ > 0 tal que:

$$\left.\frac{\sin x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \varepsilon \text{ Cuando } |(x,y) - (0,0)| < \delta$$

Tenemos que $|\sin x| \leq |x|$ y $|\sin y| \leq |y|$, luego:

$$\left|\frac{\sin x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|\sin x||\sin y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} < \delta < \varepsilon \qquad (3.23)$$

Ejemplo 3.7. Sea:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}$

$(x,y) \rightarrow f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+xy+y^2}$ (3.24)

Con $(x,y) \neq (0,0)$

Muestre que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+xy+y^2} = 0 \qquad (3.25)$$

Solución: dado ε>0 existe δ>0 tal que:

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+xy+y^2} - 0\right| < \varepsilon \quad cuando \quad \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+xy+y^2}\right| = \frac{|x||y||y|}{|x^2+xy+y^2|} \leq \frac{|x||y||y|}{|x^2+y^2|+|xy|}$$

$$\frac{|x||y||y|}{|x^2+y^2|+|xy|} \leq \frac{|x^2+y^2||y|}{|x^2+y^2||x^2+y^2|} = \frac{|x^2+y^2||y|}{2|x^2+y^2|}$$

$$\frac{|x^2+y^2||y|}{2|x^2+y^2|} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} < \frac{\delta}{2} < \varepsilon \qquad (3.26)$$

Haciendo δ = 2ε tenemos lo deseado.

Ejemplo 3.8. Sea:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}$

$$(x,y) \rightarrow f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \qquad (3.27)$$

Con $(x,y) \neq (0,0)$. Muestre que:

$$\lim_{x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = 0 \qquad (3.28)$$

Solución: dado ε > 0 existe δ > 0 tal que:

$$\left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon \quad cuando \quad \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x||y||x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}(x^2-y^2)}{\sqrt{\quad^2\quad^2}} \leq x^2-y^2 \leq x^2+y^2 < \varepsilon$$

$$\delta^2 < \varepsilon \tag{3.29}$$

Haciendo $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

Ejemplo 3.9. Sea:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathrm{R}$$
$$(x,y) \to f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{|x|+|y|}} \tag{3.30}$$

Con $(x,y) \neq (0,0)$. Muestre que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{|x|+|y|}} = 0 \tag{3.31}$$

Solución: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\left|\frac{x-y}{\sqrt{|x|+|y|}}\right| < \varepsilon \quad \textit{cuando} \quad \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\left|\frac{x-y}{\sqrt{|x|+|y|}}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{|x|+|y|}} \leq \frac{|x|+|y|}{\sqrt{|x|+y}} \cdot \frac{\sqrt{|x|+|y|}}{\sqrt{|x|+|y|}}$$

$$= \frac{|x|+|y|}{|x|+|y|} = \sqrt{|x|+|y|} < \sqrt{\sqrt{|x|+|y|}+\sqrt{|x|+|y|}} < \sqrt{\delta+\delta}$$

$$< \sqrt{2\delta} < \varepsilon < 2\delta < \varepsilon^2$$

$$\delta = \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{3.32}$$

Ejemplo 3.10. Sea:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathrm{R}$$

$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \frac{y \cdot \sin x}{|x|+|y|} \tag{3.33}$$

Con $(x,y) \neq (0,0)$. Muestre que:

$$\mathit{lim}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y \cdot \sin x}{|x|+|y|} = 0 \tag{3.34}$$

Solución: dado ε > 0 existe δ > 0 tal que:

$$\left|\frac{y\cdot \sin x}{|x|+|y|}\right| < \varepsilon \; cuando \; \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

Luego,

$$\left|\frac{y\cdot \sin x}{|x|+|y|}\right| = \frac{|y||\sin x|}{|x|+|y|} \leq \frac{|y||x|}{|x|+|y|} = \frac{|xy|}{|x|+|y|}$$

$$\leq \frac{|xy|}{2\sqrt{xy}}\cdot\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = \frac{|xy|\sqrt{xy}}{2|xy|} = \frac{\sqrt{xy}}{2} < \frac{\delta}{2} \qquad (3.35)$$

Puesto que, se tiene:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{x})^2 - 2(\sqrt{x}\,\sqrt{y}) + (\sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$|x| - 2\sqrt{xy} + |y| \geq 0 \qquad (3.36)$$

$$|x| + |y| \geq 2\sqrt{xy}$$

$$|x| + |y| < \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} \quad < 2\delta$$

Así:

$$\frac{1}{|x|+|y|} > \frac{1}{2\delta}$$

$$|x||y| < \delta^2$$

$$\sqrt{xy} < \delta \Rightarrow 2\sqrt{xy} < 2\delta \Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{2} < \frac{\delta}{2} < \varepsilon$$

$$\delta = 2\varepsilon \qquad (3.37)$$

3.1.2. CASOS EN QUE NO EXISTE EL LÍMITE

El punto (x,y) puede acercarse al punto fijo (a,b) por muchos caminos. Si $f(x,y)$ tiende al límite cuando $(x,y) \to (a,b)$, el valor de $f(x,y)$ debe aproximarse a un único a lo largo de toda clase de caminos del acercamiento del punto móvil (x,y) hacia el punto fijo (a,b), así que el valor $f(x,y)$ se aproxima a los valores distintos a medida que (x,y) se acerca a (a,b) por dos maneras distintas esto comprueba la no tendencia del límite.

Ejemplo 3.11. Veamos que el siguiente límite no existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \tag{3.38}$$

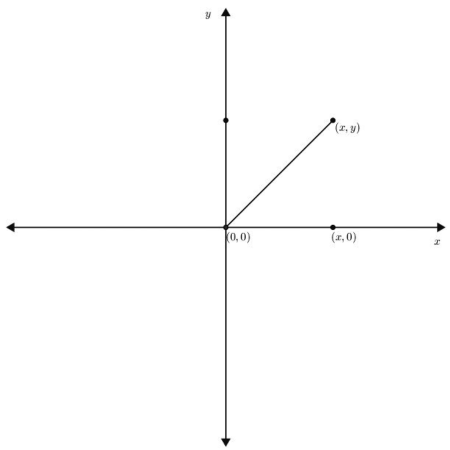
Solución: considerando el camino en el plano sobre la recta y = x, ver Figura 3.3, tenemos:

$$f(x,x) = \frac{x.x}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \tag{3.39}$$

Considerando el camino x → 0, y = 0, tenemos:

$$f(x,0) \quad = \frac{x.0}{x^2 + 0} = \frac{0}{x^2} = 0 \tag{3.40}$$

Figura 3.3 Representación de los caminos del Ejemplo 3.11



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 3.12. Sea:

i. f: $\mathbb{R}^2 \to$ R

$(x,y) \to f(x,y) = \frac{x}{|x|+|y|}$, con $(x,y) \neq (0,0)$

ii. f: $\mathbb{R}^2 \to$ R

$(x,y) \to f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, con $(x,y) \neq (0,0)$

iii. f: $\mathbb{R}^2 \to$ R

$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$, con $(x,y) \neq (0,0)$

iv. f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ R

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \text{ con } (x,y) \neq (0,0)$$

Mostrar que el límite de *f*(x,*y*) no existe cuando (*x*,*y*) → (*0*,*0*).

Solución:

i.

$$f(x,y) = \frac{x}{|x|+|y|} \tag{3.41}$$

Con (x,*y*) ≠ (0,0)

En efecto, consideremos el camino en el plano dado por los puntos (*x*,0), con *x* →0

$$f(x,0) = \frac{x}{|x|+0} = \frac{x}{|x|} \tag{3.42}$$

Si x >0 entonces $f(x,0) = \frac{x}{x} = 1$

Luego,

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = 1 \tag{3.43}$$

Ahora tenemos:

$$f(0,y) = \frac{0}{0+|y|} = \frac{0}{|y|} = 0 \tag{3.44}$$

Luego,

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = 0 \tag{3.45}$$

Por lo tanto, el límite no existe.

ii.

$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3.46}$$

Tomando el camino del conjunto de puntos del plano dado por (x,*0*), con (*x*,*0*) →(0,0)

$$f(x,0) = \frac{x+0}{\sqrt{x^2+0}} = \frac{x}{x} = 1 \tag{3.47}$$

Si $x > 0$ entonces,

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = 1 \tag{3.48}$$

Tomando el camino de los puntos en el plano de la recta $y = x$, con $(x,x) \to (0,0)$ tenemos:

$$f(x,x) = \frac{x+x}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{2x}{x\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \tag{3.49}$$

Así,

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \sqrt{2} \tag{3.50}$$

Por tanto, límite de $f(x,y)$ no existe cuando $(x,y) \to (0,0)$.

iii.

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy} \tag{3.51}$$

Consideremos el camino de puntos en el plano que satisfacen la recta $y = x$, entonces se tiene:

$$f(x,x) = \frac{x^2+x^2}{xx} = \frac{2x^2}{x^2} = 2 \tag{3.52}$$

Así,

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = 2 \tag{3.53}$$

Consideremos el camino de puntos en el plano que satisfacen la recta $y = mx$, $m \neq 1$ en (3.53), entonces se tiene:

$$f(x,\mathrm{m}x) = \frac{x^2+m^2x^2}{x\cdot(mx)} = \frac{x^2(1+m^2)}{mx^2} = \frac{(1+m^2)}{m}$$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,\mathrm{m}x) = \frac{(1+m^2)}{m} \tag{3.54}$$

Por tanto, límite de $f(x,y)$ no existe cuando $(x,y) \to (0,0)$.

iv.

$$f(x,y)\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$Df = \mathbb{R}^2 \to \{(0,0)\}$$

Consideremos el camino de puntos en el plano (x,0) → (0,0), entonces:

$$f(x,0) = \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = 1 \tag{3.56}$$

Ahora, tomando el camino de puntos en el plano (x,x) → (0,0) tenemos:

$$f(x,x) = \frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} = \frac{0}{2x^2} = 0$$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = 0 \tag{3.57}$$

Por tanto, límite de $f(x,y)$ no existe cuando $(x,y) \to (0,0)$.

Ejemplo 3.13. Mostrar que no existe el límite de $f(x,y) = \frac{x^2}{x^3+y|y|}$, con $(x,y) \neq (0,0)$. Cuando $(x,y) \to (0,0)$

Solución: tomemos el camino en el plano formado por puntos de la forma (x,x) → (0,0)

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^3 + x|x|} \tag{3.58}$$

Si $x > 0$, se tiene que:

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^3 + x|x|} = \frac{x^2}{x^3 + x^2}$$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^3 + x|x|} = \frac{x^2}{x^2(x+1)} = \frac{1}{(x+1)}$$

$$f(x,x) = \frac{1}{(x+1)} \tag{3.59}$$

Luego,

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{1}{(x+1)} = 1 \tag{3.60}$$

Si $x < 0$, se tiene que:

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^3 + x|x|} = \frac{x^2}{x^3 - x^2}$$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^3 + x|x|} = \frac{x^2}{x^2(x-1)} = \frac{1}{(x-1)}$$

$$f(x,x) = \frac{1}{(x-1)} \tag{3.61}$$

Luego,

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{1}{(x-1)} = -1 \tag{3.62}$$

Por tanto, límite de $f(x,y)$ no existe cuando $(x,y) \to (0,0)$.

Ejemplo 3.14. Muestre que $\lim_{(x\ y)\to(0\ 0)} \frac{xy^2}{x^2+4y^2} = 0$,

Solución: en efecto, dado ε >0 existe un δ > 0 tal que:

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+4y^2}\right| < \varepsilon, \quad cuando \quad \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+4y^2}\right| = \frac{|x||y^2|}{|x^2+4y^2|} = \frac{|xy||y|}{|x^2+(2y^2)|} \leq \frac{|xy||y|}{|-4xy|} \tag{3.63}$$

$$= \frac{|xy||y|}{|-4||xy|} = \frac{y}{4} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4} < \frac{\delta}{4} = \varepsilon$$

Haciendo δ = 4ε se concluye que,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+4y^2} = 0 \tag{3.64}$$

Ejemplo 3.15. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Solución: tenemos el camino en el plano formado por puntos de la forma (x,0) → (0,0)

$$f(x,0) = \frac{x^3+0^3}{x^2+0^2} = \frac{x^3}{x^2} = x \tag{3.65}$$

Así,

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = 0 \tag{3.66}$$

Tomando el camino en el plano formado por puntos de la forma $(0,y) \to (0,0)$

$$f(0,y) = \frac{0^3+y^3}{0^2+y^2} = \frac{y^3}{y^2} = y \tag{3.67}$$

Así,

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = 0 \tag{3.68}$$

Tomando el camino en el plano formado por puntos de la forma (x,x) → (0,0)

$$f(x,x) = \frac{x^3 + x^3}{x^2 + x^2} = \frac{2x^3}{2x^2} = x \tag{3.69}$$

Así,

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = 0 \tag{3.70}$$

Veamos que,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0,$$

En efecto, dado que ε > 0 existe δ > 0 tal que,

$$\left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0\right| < \varepsilon, \quad cuando \quad \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

$$\mathrm{Dom} f := \mathbb{R}^2 \to \{(0,0)\}$$

$$\left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right| = \frac{|x^3 + y^3|}{|x^2 + y^2|} = \frac{|(x+y)||(x^2 - xy + y^2)|}{|(x^2 + y^2)|}$$

$$\leq \frac{\left(2\sqrt{x^2 + y^2}\right)|x^2 - xy + y^2|}{|x^2 + y^2|} \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(|x^2 + y^2| + |xy|)}{|x^2 + y^2|}$$

$$\leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}\left(|x^2 + y^2| + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{|x^2 + y^2|}$$

$$\leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(|x^2 + y^2| + |x^2 + y^2|)}{|x^2 + y^2|}$$

$$\leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(2|x^2 + y^2|)}{|x^2 + y^2|} < \varepsilon$$

$$\leq 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta < \varepsilon$$

Haciendo $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

Ejemplo 3.16. Sea:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = \frac{x^2 - y}{\sqrt{x^4 + y^4}} \tag{3.71}$$

Con (x,y) ≠ (0,0). Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y}{\sqrt{x^4 + y^4}} \tag{3.72}$$

Solución: veamos si existe el límite:

Tomamos el camino en el plano formado por puntos de la forma (x,0) → (0,0)

$$f(x, 0) = \frac{x^2 - 0}{\sqrt{x^4 + 0^4}} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \tag{3.73}$$

Luego,

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x, 0) = 1 \tag{3.74}$$

Tomando el camino en el plano formado por puntos de la forma $y = x^2$ tenemos:

$$f(x, x^2) = \frac{x^2 - x^2}{\sqrt{x^4 + x^8}} = \frac{0}{\sqrt{x^4(1 + x^4)}} = \frac{0}{x^2\sqrt{1 + x^4}} = 0$$

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} f(x, x^2) = 0 \tag{3.75}$$

Por lo tanto, el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y}{\sqrt{x^4+y^4}}$, no existe, puesto que 0 ≠ 1

Ejemplo 3.17. Evaluar el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+2y^2}; \text{ Domf: } \mathbb{R}^2 \rightarrow \{(0,0)\}$$

Solución: tomemos el camino en el plano formado por puntos de la forma (x,0) → (0,0)

$$f(x, 0) = \frac{x^2 \cdot 0}{x^4 + 2(0)^2} = \frac{0}{x^4} = 0. \text{ Así, } \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x, 0) = 0$$

Si tomamos el camino en el plano formado por puntos de la forma $y = x^2$

$$f(x,x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + 2x^2} = \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x^2) = \frac{1}{3} \tag{3.76}$$

Por tanto, no existe el límite $\lim_{(x\ y)\to(0\ 0)} \frac{x^2y}{x^4+2y^2}$, puesto $0 \neq \frac{1}{3}$

Ejemplo 3.18. Evaluar el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x| + y^2} \tag{3.77}$$

Solución: tomemos el camino en el plano formado por puntos de la forma (x,0) → (0,0)

$$f(x,0) = \frac{x \cdot 0}{|x| + 0^2} = \frac{0}{|x|} = 0$$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = 0 \tag{3.78}$$

Tomando el camino en el plano formado por puntos de la forma (0,y) → (0,0)

$$f(0,y) = \frac{0 \cdot y}{|0| + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = 0 \tag{3.79}$$

Tomando el camino en el plano formado por puntos de la forma (x,x) → (0,0)

$$f(0,y) = \frac{x \cdot x}{|x| + x^2} = \frac{x^2}{x(1+x)} = \frac{x}{1+x} \tag{3.80}$$

Si x > 0

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = \frac{0}{1} = 0 \tag{3.81}$$

Veamos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x| + y^2}$$

En efecto dado ε > 0 existeδ > 0 tal que.

$$\left.\frac{xy}{|x| + y^2}\right| < \varepsilon, \quad cuando \quad \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

Luego,

$$\left|\frac{xy}{|x|+y^2}\right| = \frac{|x||y|}{|x|+y^2} = \frac{|x||y|}{|x|+|y||y|} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}|y|}{\sqrt{x^2+y^2}(1+|y|)}$$

$$\le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{\delta}{1+\delta} < \varepsilon \qquad (3.82)$$

Con $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$

Ejemplo 3.19. Evaluar el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right); \; Domf = \mathbb{R}^2 - \{(0,y)\}$$

Solución: tomando el camino en el plano formado por puntos de la forma (x,0) → (0,0) tenemos:

$$f(x,0) = x\tan^{-1}(0) = x \cdot 0. \quad \text{Así,} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) = 0$$

Tomando (x,x) → (0,0) tenemos:

$$f(x,x) = 2x\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 2x\frac{\pi}{4}, \quad \text{así} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) = 0$$

Veamos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \qquad (3.83)$$

En efecto, dado ε > 0 existe δ > 0 tal que:

$$\left|(x+y)\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right| < \varepsilon, \quad cuando \quad \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\left|(x+y)\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right| = |x+y|\left|\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right| \le |x+y|\left|\frac{\pi}{2}\right|$$

$$\le \frac{\pi}{2}(|x|+|y|) \le \frac{\pi}{2}\cdot 2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \le \pi\sqrt{x^2+y^2} < \pi\delta < \varepsilon$$

Haciendo $\delta = \frac{\varepsilon}{\pi}$

Ejemplo 3.20. Evaluar el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right) \qquad (3.84)$$

Solución: veamos que el límite es cero:

En efecto, dado ε > 0 existe δ > 0 tal que:

$$|(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right)| < \varepsilon, cuando\ \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\begin{aligned}
|(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right)| &= |x+y|\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y} \\
&= |x+y|\cdot\frac{1}{2}(\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)) \\
&= \frac{1}{2}(x+y)\left[\sin\left(\frac{x+y}{xy}\right)+\sin\left(\frac{y-x}{xy}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}|x+y| \\
&\leq |x|+|y| \leq 2\delta < \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.85}$$

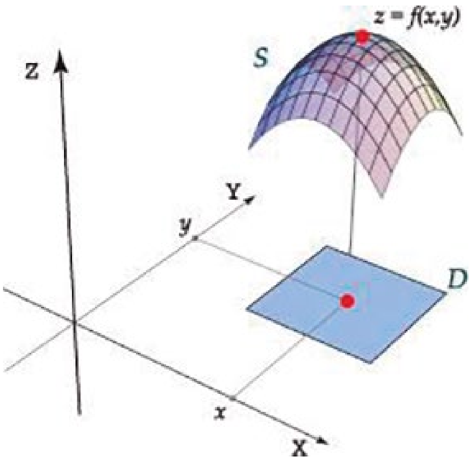
Haciendo $\delta = \frac{\varepsilon}{\pi}$

3.1.3. CONTINUIDAD Y DERIVACIÓN PARCIAL

Sea $f(x,y)$ una función definida en D como la presentada en la Figura 3.4. Se dice que f es continua en (a,b)∈D si:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \tag{3.86}$$

Figura 3.4.Gráfica de una función definida en un conjunto D.



Fuente: Elaboración propia

Se dice que *f* no es continua en (a,b) si:

i. $f(a,b)$ no está definida.

ii. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ no existe.

iii. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \neq f(a,b)$.

Ejemplo: 3.21. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to R$ la función definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \tag{3.87}$$

¿Será continua en (0,0)?

Solución:

Veamos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 \tag{3.88}$$

En efecto si $\forall\ \varepsilon > 0$, se tiene que:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon, \quad luego \quad \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| |y|$$

$$\leq \frac{|x||x|}{|x^2+y^2|}|y| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{|x^2+y^2|}|y| \leq |y| \tag{3.89}$$

$$\leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta < \varepsilon$$

Por tanto, *f* no es continua en (0,0), puesto que $f(0,0) = 1 \neq 0$

3.1.4. ESPACIO DE BANACH

Es un espacio vectorial, en donde se define una norma y este es compacto con respecto a la norma.

Ejemplo 3.22. $(\mathbb{R},|\cdot|)$ es un espacio de Banach con la norma del valor absoluto.

3.1.5. ESPACIO DE HILBERT

Es un espacio de Banach con respecto a una norma que proviene de un producto interior.

Ejemplo 3.23. $(\mathbb{R}^2,|\cdot|)$ es un espacio de Hilbert si $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$

$\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Definimos el producto interno y la norma en $\mathbb{R}^2$, como

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 \tag{3.90}$$

$$|\vec{x}| = (\vec{x} : \vec{x})^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 3.24. Sea f:$\mathbb{R}^2 \to$ R la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } (x,y) = 0 \\ \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \tag{3.91}$$

f no es continua en (0,0), ya que no existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$, se observa que f es continua en cualquier punto del plano distinto del origen.

Puesto que:

$$f(x,x) = \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \frac{1}{2} \tag{3.92}$$

$$f(0,x) = \frac{0 \cdot x}{0^2 + x^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{(0,x)\to(0,0)} f(0,x) = 0 \tag{3.93}$$

Por lo tanto, el límite no existe y f no es continua en (0,0).

Ejemplo 3.25. Investigar la continuidad de $f(x,y)$ en el origen (0,0)

$$f(x,y) = \frac{xy}{|x| + |y|}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0$$

Solución: sea f: $\mathbb{R}^2 \to$ R la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{|x| + |y|} & , \ si \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \tag{3.94}$$

Verifiquemos si f(x,y) es continua en (0,0)

$f(0,0) = 0$

i. Existencia del $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{xy}{|x|+|y|}$, debemos mostrar que para todo ε > 0, existe δ > 0 tal que $\sqrt{(x^2 + y^2)} < \delta$, implica $\frac{xy}{|x|+|y|}, < \varepsilon$. En efecto,

$$\left|\frac{xy}{|x| + |y|}\right| = \frac{|xy|}{|x| + |y|} \leq \frac{|xy|}{2\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2}\sqrt{xy}$$

$$\leq \frac{1}{2}\frac{|x| + |y|}{2} = \frac{|x| + |y|}{4} \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{4} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} < \varepsilon \tag{3.95}$$

Definiendo δ = 2ε se tiene la existencia del δ

Luego:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{xy}{|x| + |y|} = 0 \tag{3.96}$$

Así f es continua en (0,0).

Ejemplo 3.26. Investigar la continuidad de *f*(*x*,*y*) en el origen (0,0).

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{|x| + |y|}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0);\ f(0,0) = 1$$

Solución: sea f : $\mathbb{R}^2 \to$ R la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 - y^2}{|x| + |y|}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \tag{3.97}$$

Verifiquemos si *f*(x,*y*) es continua en (0,0).

i. f(0,0)=0

ii. Existencia del $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{x^2-y^2}{|x|+|y|}$, debemos mostrar que para todo ε > 0, existe δ > 0 tal que $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, implica $\frac{x^2-y^2}{|x|+|y|}\Big| < \varepsilon$. En efecto. $\left|\frac{x^2-y^2}{|x|+|y|}\right| =$

$$\frac{|x^2-y^2|}{|x|+|y|} = \frac{|(x+y)(x-y)|}{|x|+|y|} = \frac{|x-y||x+y|}{|x|+|y|} \leq \frac{(|x|+|y|)(|x|+|y|)}{(|x|+|y|)} = |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$$

Definiendo δ = 2ε se tiene la existencia del δ

Luego: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{xy}{|x|+|y|} = 0$

iii. $\lim_{(x\ y)\to(0\ 0)} f(x,y) \neq f(0,0)$, por lo tanto f no es continua en (0,0)

Ejemplo 3.27. Verificar si la función definida a continuación es continua en (0,0).

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2},\ \text{si } (x,y) \neq (0,0);\ f(0,0) = 1$$

Solución: como f: $\mathbb{R}^2 \to$ R viene definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Verifiquemos si f(x,y) es continua en (0,0).

i. $f(0,0)=0$

ii. Existencia del $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

$$f(x,0) = \frac{(x-0)^2}{x^2+0^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \tag{3.99}$$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \tag{3.100}$$

iii. Tomando (x,x) → (0,0)

$$f(x,x) = \frac{(x-x)^2}{x^2+x^2} = \frac{0}{2x^2} = 0 \tag{3.101}$$

iv. Así,

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = 0 \tag{3.102}$$

v. Por tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe y f no es continua en (0,0)

3.1.6. DIFERENCIABILIDAD EN $\mathbb{R}$

Sea f: $\mathbb{R} \rightarrow$ R. f es diferenciable en cualquier punto, sea $h \in Domf$

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r \tag{3.103}$$

$f'(x)$ = transformación lineal, r = residuo tiende a cero.

Ejemplo 3.28. Si $f(x) = x$, entonces:

$$f(x+h) = x + h$$

$$f(x+h) - f(x) = x + h - x = 1 \cdot h + 0 \tag{3.104}$$

3.1.7. DERIVADA PARCIAL

Definición 3.3. (Derivada parcial). Sea f: $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ R; definimos la derivada parcial con respecto a x en $x = a$, y $y = b$, como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \Rightarrow 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \tag{3.105}$$

Se nota por fx, también definimos la derivada parcial con respecto a y en $x = a$, y $y = b$, como:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \Rightarrow 0} \frac{f\big(a,b+h) - f(a,b)\big)}{h} \tag{3.106}$$

Se nota por fy.

Ejemplo 3.29. Sea f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ R definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ x + y, & si \quad xy = 0 \end{cases} \tag{3.107}$$

Calcular:

a. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

b. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

Solución:

a. $$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0+h+0-(0+0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1\end{aligned} \tag{3.108}$$

b. $$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0+0+h-(0+0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1\end{aligned} \tag{3.109}$$

¿Será continua f(x,y) en (0,0)?

1. $f(0,0) = 0$

2. Busquemos dos caminos:
   Consideremos el camino de puntos en el plano (t,0), con (t,0) → (0,0)
   f(t,0)=t + 0 = t, luego $\lim_{(t,0)\to(0,0)} f(t,0) = 0.$

   Consideremos el camino de puntos en el plano (t,t), con (t,t) → (0,0)
   f(t,t) = 1, luego $\lim_{(t\ 0)\to(0\ 0)} f(t,t) = 1.$

   Por tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$, no existe. *Y* f(x,y) no es continua.

Ejemplo 3.30. Sea f: $\mathbb{R}^2$ → R definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1+\sqrt{x^2+y^2}, & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases} \tag{3.110}$$

Calcular:

a. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

b. $\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0)$

c. Analiza la continuidad de f en (0,0)

Solución:

a.
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0{,}0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-F(0{,}0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0\end{aligned}\tag{3.111}$$

b.
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0{,}0+h)-f(0{,}0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-F(0{,}0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0\end{aligned}\tag{3.112}$$

c. ¿Será continua $f(x,y)$ en (0,0)?

1. $f(0{,}0)=0$

2. Tomemos dos caminos:
   Consideremos el camino de puntos en el plano $(t,0)$, con $(t,0) \to (0,0)$

   $f(t,0) = 0,$

$$\lim_{(x,y)\to(0{,}0)} f(t,t) = 0 \tag{3.113}$$

   Consideremos el camino de puntos en el plano (t,t), con $(t,t) \to (0,0)$

   $f(t,t) = 1 + \sqrt{t^2 + t^2} = 1+\sqrt{2t^2} = 1+\sqrt{2}t$

$$\lim_{(t,t)\to(0,0)} f(t,t) = 1 \tag{3.114}$$

Por tanto. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

3.1.8. PROPAGACIÓN DE ERRORES POR DERIVADA TOTAL

Definición 3.4. (Diferencial total). Si una cantidad Q es una función de varias variables Q(x,y,z), de $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) sobre $\mathbb{R}$, el diferencial total de Q(x,y,z) está dado por:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz \tag{3.115}$$

Ejemplo 3.31. Sea Q(x,y,z) = xyz. Determine el diferencial total de Q(x,y,z).

Solución: tenemos que $\frac{\partial Q}{\partial x} = yz; \frac{\partial Q}{\partial y} = xz; \frac{\partial Q}{\partial z} = xy.$. Luego el diferencial total de Q(x,y,z) viene dado por:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz$$

$$dQ = yzdx + xzdy + xydz \tag{3.116}$$

Ahora,

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{yzdx + xzdy + xydz}{Q}$$

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{yzdx + xzdy + xydz}{xyz}$$

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} \tag{3.117}$$

Ejemplo 3.31. Sea Q(x,y) = $x^n y^m$, con n,m ϵN. Determine el diferencial total de Q(x,y).

Solución: tenemos que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \mathrm{n}x^{n-1}y^m; \frac{\partial Q}{\partial y} = \mathrm{m}x^n y^{m-1}$.. Luego el diferencial total de Q(x,y) viene dado por:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy$$

$$dQ = \mathrm{n}x^{n-1}y^m dx + \mathrm{m}x^n y^{m-1}dy \tag{3.118}$$

Ahora,

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{\mathrm{n}x^{n-1}y^{m}dx+\mathrm{m}x^{n}y^{m-1}dy}{Q}$$

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{\mathrm{n}x^{n-1}y^{m}dx+\mathrm{m}x^{n}y^{m-1}dy}{x^{n}y^{m}}$$

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{ndx}{x}+\frac{mdy}{y}\frac{dz}{z} \tag{3.119}$$

3.1.9. DERIVADA DIRECCIONAL

En forma más general, dado un vector unitario $\vec{u}$ = (cosθ,sinθ), podemos pensar en la derivada de la función restringida sobre la recta paralela al vector *p*. Como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{t} \tag{3.120}$$

La cual se llama derivada direccional de *f* en la dirección *u* y se denota por:

$$D_u f(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial u} \tag{3.121}$$

Observación. La derivada $D_u f$ es un caso particular cuando $\vec{u}$ = (1,0) y que se tiene la derivada parcial $D_2 f(x_0, y_0)$ tomando $\vec{u}$ =(0,1)

Ejemplo 3.32. Sea *f*: $\mathbb{R}^2 \to$ R definida como:

$$f(x,y)=\begin{cases}1+\sqrt{x^2+y^2}, & \text{si} \quad xy\neq 0\\ x+y, & si \quad xy=0\end{cases} \tag{3.122}$$

No posee derivada direccional en (0,0).

Solución: en efecto:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{t} \tag{3.123}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\cos\theta,0+t\sin\theta)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1+t}{t}$$

No existe el límite. Por tanto, no posee derivada direccional.

Ejemplo 3.33. Si *f*: $\mathbb{R}^2 \to$ R es definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \tag{3.124}$$

Hallar la derivada direccional de *f*(x,y) en (0,0).

Solución: hallar la derivada direccional en (0,0).

$$lim_{t\to 0} \frac{f(0 + t\cos\theta, 0 + t\sin\theta) - f(0,0)}{t}$$

$$= lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t}$$

$$= lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta)}{t} = lim_{t\to 0} \frac{t^3\cos^2\theta \sin\theta}{t(t^4\cos^4\theta + t^2\sin^2\theta}$$

$$= lim_{t\to 0} \frac{t^3\cos^2\theta \sin\theta}{t^3(t^2\cos^4\theta + \sin^2\theta} = lim_{t\to 0} \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{(t^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \tag{3.125}$$

Para θ ≠ 0, θ ≠ π

Si θ = 0 ó t=π tenemos: $\lim_{t\to 0} \frac{f(\pm t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2\cdot 0}{t^4+0^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$ luego, existe la derivada direccional en cualquier dirección. Y la función no es continua en (0,0).

Observación. la existencia de la derivada direccional no implica la continuidad de la función.

Ejemplo 3.34. Si $f:\mathbb{R}^2 \to$ R es definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{|x| + |y|}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \tag{3.126}$$

Solución: hallar la derivada direccional y ver si f es continua en (0,0).

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\cos\theta, 0+t\sin\theta)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\theta\cdot t\sin\theta-0}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\theta\ t\sin\theta}{t}=\lim_{t\to 0} t\cos\theta\sin\theta=0\cdot\cos\theta\sin\theta=0 \qquad (3.127)$$

Veamos si f es continua en (0,0).

i. $f(0,0)=0$

ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{|x|+|y|}$, veamos si existe.

iii. Si tomamos el camino del conjunto de puntos de la forma $(x,x)\to(0,0)$, tenemos que para $x>0$

$$f(x,x)=\frac{xx}{|x|+|x|}=\frac{xx}{2|x|}=\frac{1}{2} \qquad (3.128)$$

Así,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x)=\frac{1}{2} \qquad (3.129)$$

Si tomamos el camino del conjunto de puntos de la forma $(x,0)\to(0,0)$ tenemos para $x>0$

$$f(x,x)=\frac{x\cdot 0}{|x|+|0|}=0 \qquad (3.130)$$

Así,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0)=0 \qquad (3.131)$$

Por tanto, el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x)$ no existe, así f no es continua en (0,0).

Ejemplo 3.35. Si f: $\mathbb{R}^2\to R$ es definida como:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\\ \tan^{-1}\frac{y}{x}, & si \quad (x,y)\neq(0,0)\end{cases} \qquad (3.132)$$

Hallar $D_1 f(0,0)$, $D_2 f(0,0)$. ¿Es $f(x,y)$ continua en (0,0)?

Solución:

- $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan^{-1}\left(\frac{0}{h}\right)-\frac{\pi}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan^{-1}(0)-\frac{\pi}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{\pi}{2}}{h} = 0 \end{aligned} \tag{3.133}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-F(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 \end{aligned} \tag{3.134}$$

Veamos si f es continua en (0,0):

1. $f(0,0) = \frac{\pi}{2}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ veamos si existe, en efecto tomamos dos caminos $(x,y) \to (0,0)$.
   Tomamos el camino de puntos en el plano de la forma $(0,y) \to (0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ tomamos } (x,0) \to (0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} = \tan^{-1}\frac{0}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 \tag{3.135}$$

Por lo tanto, f no es continua.

3.1.10. DIFERENCIAL Y DIFERENCIABILIDAD

Definición 3.5. (Función diferenciable). Sea f:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; se define que *f* es diferenciable en (a,b) ∈ $\mathbb{R}^2$, si existe L transformación lineal continua tal que:

$$f[(a,b)+(h_1,h_2)]-f(a,b)=L(a,b)(h_1,h_2)+R \tag{3.136}$$

Donde,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|R|}{|(h_1,h_2)|}=0 \tag{3.137}$$

Observación: si *f* es diferenciable en (a,b), f es continua en $\mathbb{R}$.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\to f(a+h)-f(a)=f'(a)h+R \tag{3.138}$$

Definición 3.6. (Gradiente de una función f). Sea *f*: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; una función diferenciable, se define el gradiente de f:

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{3.139}$$

Si *f*: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (es un campo vectorial) decimos que *f* es diferenciable en $(a_1,a_2,...,a_n)$=a si existe una transformación lineal y continua en L.

$$f(x+h)-f(x)=f'(a)h+R \text{ con } \lim_{h\to 0}\frac{|R|}{|h|}=0 \ \ donde\ h\in\mathbb{R}^n$$

Aquí,

$$x=(x_1,x_2,...,x_n)$$

$$h=(h_1,h_2,...,h_n)$$

Representación matricial de L

Se define el Jacobiano J de m filas y n columnas de una función *f*: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Sea *x* ∈ $\mathbb{R}^n$, *f*(x) = $(f_1,f_2,\cdots,f_m)$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{3.140}$$

$$m \times n$$

$$(f\colon \mathbb{R}^n \leftrightarrows \mathbb{R}^n)$$

Observación. Si f no es continua en (a,b), entonces *f* no es diferenciable en (a,b).

Ejemplo 3.36. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 1, & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases} \tag{3.141}$$

Demostrar si *f* es diferenciable en (0,0).

Solución: supongamos que f es diferenciable en (0,0) esto si existe *L* transformación lineal y continua tal que:

$$f[(0,0) + (h_1 + h_2)] - f(0,0) = L(h_1,h_2) + R \text{ con } \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|R|}{|h|} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$f(h_1,h_2) = \nabla f(0,0)(h_1,h_2) + R \tag{3.142}$$

$$1 = 0 + R \,;\, R = 1$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{|h|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \neq 0$$

Esto contradice lo supuesto. Por lo tanto, *f* no es diferenciable.

Ejemplo 3.37. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = (1 + x + y^2, e^{y-x^2})$, verificar si *f* es diferenciable en (0,0)

Solución: sea $h = (h_1,h_2)$

$$f[(0,0) + (h_1,h_2)] - f(0,0)$$

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) = f(h_1,h_2) - f(1,1) \qquad (3.143)$$

$$= \left(1 + h_1 + h_2^2, e^{h_1 - h_2^2}\right) - (1,1)$$

Luego,

$$f[(0,0) + (h_1,h_2)] - f(0,0) = \left(h_1 + h_2^2, e^{h_1 - h_2^2} - 1\right)$$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2e^{y-x^2} \\ 2y & e^{y-x^2} \end{pmatrix} Luego: J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J(0,0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = L$$

$$(3.144)$$

$$f[(0,0) + (h_1,h_2)] - f(0,0) = (h_1,h_2) + R$$

$$\left(h_1 + h_2^2, e^{h_1 - h_2^2} - 1\right) - (h_1,h_2) = R$$

$$R = \left(h_2^2, e^{h_1 - h_2^2} - h_2 - 1\right)$$

Veamos que:

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{|R|}{|h|} = \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{\sqrt{h_2^4 + \left(e^{h_1 - h_2^2} - h_2 - 1\right)^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \qquad (3.145)$$

Ejemplo 3.38. Sea $f(x,y) = \boldsymbol{g}(x) + h(y)$ donde $\boldsymbol{g}(x)$, $h(x)$ son derivables, demostrar que f es diferenciable.

Solución: sea:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to f(x,y) = \boldsymbol{g}(x) + h(y)$$

$$\boldsymbol{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (3.146)$$

$$x \to \boldsymbol{g}(x)$$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \to h(y)$

Supongamos que $\boldsymbol{g}$ y h son diferenciables en a y b respectivamente, esto es:

Sean $h_1, h_2 \in$ R:

$$g(x+h_1) - g(x) = \frac{\partial g(a)}{\partial x} h_1 + R_1 \quad con \quad R_1 = 0 \quad (1) \tag{3.147}$$

$$h(y+h_2) - h(y) = \frac{\partial h(b)}{\partial y} h_2 + R_2 \quad con \quad R_2 = 0 \quad (2) \tag{3.148}$$

Sumando (1) y (2) tenemos,

$$g(x+h_1) - g(x) + h(y+h_2) - h(y) = \frac{\partial g(a)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial h(b)}{\partial y} h_2 + R_1 + R_2 \tag{3.149}$$

Asociando tenemos,

$$g(x+h_1) + h(y+h_2) - \big(g(x) + h(y)\big) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)_{(a,b)} (h_1, h_2) + R \tag{3.150}$$

Por definición tenemos con $R = R_1 + R_2$

$$f[(x,y) + (h_1,h_2)] - f(x,y) = \nabla f(a,b)(h_1,h_2)\, con\, R = 0 \tag{3.151}$$

Así existe la transformación lineal y continua por lo tanto f es diferente.

Ejemplo 3.39. Sea:

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0)\ f(0,0) = 0$$

Mostrar que f no es diferenciable en (0,0).

Solución: en efecto. Sea f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{3.152}$$

Razones por el absurdo, esto es, supongamos que f es diferenciable, esto si existe una transformación lineal y continua tal que $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$)

$$f[(x,y)+(h_1,h_2)]-f(x,y)=\nabla f(x,y)(h_1,h_2)+R$$
$$=f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y) \tag{3.153}$$
$$=\frac{(x_1+h_1)^2(y+h_2)}{(x_1+h_1)^2+(y+h_2)^2}-\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$
$$f[(x,y)+(h_1,h_2)]-f(x,y)=(0{,}0)(h_1,h_2)+R=0+R$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\begin{cases}0, & \text{si} \quad (x,y)=(0{,}0)\\ \dfrac{2yx(x^4+y^2)-(x^2y)(4x^3)}{(x^4+y^2)^2}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0{,}0)\end{cases} \tag{3.154}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\begin{cases}0, & \text{si} \quad (x,y)=(0{,}0)\\ \dfrac{x^2(x^4+y^2)-(x^2y)(2y)}{(x^4+y^2)^2}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0{,}0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f(0{,}0)}{\partial x}=0 \tag{3.155}$$

$$\frac{\partial f(0{,}0)}{\partial y}=0 \tag{3.156}$$

3.1.11. DIFERENCIABILIDAD

Habíamos observado que la diferenciabilidad parcial no siempre implica la diferenciabilidad. Sin embargo, si implica la diferenciabilidad si suponemos adicionalmente la continuidad de las derivadas parciales.

Teorema 3.1. Si f es derivable parcialmente en una vecindad del punto a = (a,b) y $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en a = (a,b) entonces f es diferenciable en a = (a,b), (f:R^2→R).

Prueba: veamos que dado ε > 0, existe un δ > 0 tal que:

$$\frac{f(x,y)-f(a,b)-\{A(x-a)+B(y-b)\}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}<\varepsilon \tag{3.157}$$

Para todo,

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\ ) < \delta \tag{3.158}$$

En efecto,

$$f(x,y) - f(a,b) = \{f(x,y) - f(x,b)\} + \{f(x,b) - f(a,b)\} \tag{3.159}$$

Por hipótesis f es derivable parcialmente en una vecindad de (a,b), entonces $f(a,b)$ es derivable con respecto a x y como $D_1 f$ es continua en $a = (a,b)$, apliquemos el teorema del valor medio (a,b) y obtenemos que existe $c \in (a,x)$ tal que:

$$f(x,y) - f(a,b) = D_1 f(c,b)(x - a) \tag{3.160}$$

Análogamente para que x fijo la función $f(a,b)$ es derivable con respecto a a y como por hipótesis $D_2 f$ es continua en a = (a,b) aplicando el término del valor medio existe $dc(b,y)$ tal que:

$$f(x,y) - f(y,b) = D_2 f(x,d)(y - d) \tag{3.161}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1).

$$\begin{aligned} &f(x,y) - f(a,b) = \{f(x,y) - f(x,b)\} + \{f(x,b) - f(a,b)\} \\ &= D_1 f(c,b)(x-a) + D_2 f(x,d)(y-b) \end{aligned} \tag{3.162}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &|f(x,y) - f(a,b) - \{D_1 f(a,b)(x-a) + D_2 f(a,b)(y-b)\}| \\ &= |\{D_1 f(c,b)(x-a) + D_2 f(x,d)(y-b)\} - \{D_1 f(a,b)(x-a) + D_2 f(a,b)(y-a)\}| \\ &= |\{D_1 f(c,b) - D_1 f(a,b)\}(x-a) + \{D_2 f(x,d) - D_2 f(a,b))\}(y-b)| \\ &\leq |D_1 f(c,b) - D_1 f(a,b)||x-a| + |D_2 f(x,d) - D_2 f(a,b)||y-b| \end{aligned}$$

Como $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en (a,b) tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_n > 0$, $\delta_2 > 0$ tal que:

$$|D_1 f(c,b) - D_1 f(a,b)| < \varepsilon \quad para \quad todo \quad \left|\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right| < \delta_1 \quad y$$
$$|D_2 f(x,d) - D_2 f(a,b)| < \varepsilon \quad para \quad todo \quad \left|\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right| < \delta_2$$

Ahora tenemos,

$$\begin{aligned} &|D_1 f(c,b) - D_1 f(a,b)||x-a| + |D_2 f(x,d) - D_2 f(a,b)||y-b| \\ &< \varepsilon|x-a| + \varepsilon|y-b| \\ &\leq \varepsilon\left|\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right| + \varepsilon\left|\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right| \\ &= 2\varepsilon\left|\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right| \end{aligned} \tag{3.163}$$

De donde,

$$\frac{|f(x,b) - f(a,b) - D_1 f(c,b) - D_1 f(a,b) + D_2 f(x,d) - D_2 f(a,b) < 2\varepsilon}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \quad (3.164)$$

Sea$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para todo que $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$ haciendo $A = D_1 f$, $B = D_2 f$ obtenemos lo deseado para $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2. Supongamos que una de las derivadas parciales, $D_1 f, \cdots, D_n f$, existe en c y que las restantes n - 1 derivadas parciales existen en una cierta n - *bola* $B(c)$ y son continuas en c. Entonces f es diferenciable en c.

Prueba: por definición una función vectorial $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ es diferenciable en c si y solo si cada fi, $i = 1, \cdots, n$ es diferenciable en c. Por consiguiente, basta demostrar el teorema cuando f es de valor real.

Supongamos que $D_1 f(c)$ existe y que las derivadas parciales continuas son $D_2 f, \cdots, D_n f$.

El único candidato para $f'(c)$ es el vector gradiente $\nabla f(c)$, veamos que $f(c + V) - f(c) = \nabla f(c) \cdot V + o(|V|)$ cuando $V \to 0$, esto probará el teorema. La idea consiste en expresar la diferencia $f(c + V) - f(c)$ como una suma de n términos, siendo el k-ésimo término una aproximación de $D_k f(c) V_k$, para este f hacemos $V = \lambda y$ en donde $|y| = 1$, $\lambda = |V|$, mantenemos λ suficientemente pequeño para que $c + v$ pertenezcan a la bola $B(c)$ en la que las derivadas parciales $D_2 f, \cdots, D_n f$ existen. Expresando y en términos de sus componentes, tenemos $y = y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n$ en u es el k-enésimo vector coordenada unitario. Ahora escribimos la diferencial $f(c + V) - f(c)$ como la suma telescópica:

$$f(c+V) - f(c) = f(c+\lambda y) - f(c) = \sum_{k=1}^{n} \{f(c+\lambda V_k) - f(c+\lambda V_k)\} \quad (3.165)$$

Siendo $V_0 = 0$, $V_1 = y_1 u_1$, $V_2 = \lambda_1 u_1 + y_2 u_2, \cdots$, $V_n = y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n$ el primer término de la suma en $f(c + \lambda y_1 u_1) - f(c)$. Dado que los dos puntos c y $c + \lambda y_1 u_1$ difieren solo en sus primeras componentes y dado que $D_1 f(c)$ existe, podemos escribir:

$$f(c + \lambda x y_1 u_1) - f(c) = \lambda y_1 D_1 f(c) + \lambda y_1 E_1(\lambda) \quad (3.166)$$

Con $E_1(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to 0$. Para $k \geq 2$, el k - ésimo término de la suma está dado por:

$$f(c+\lambda V_k \quad +\lambda y_k u_k) - f(c+\lambda V_k \quad) = f(b_k+\lambda y_k u_k) - f(b_k) \qquad (3.167)$$

Siendo $b_k = c + \lambda V_{k-1}$, los dos puntos b_k y $b_k + \lambda y_k u_k$ difieren solo en su k-ésimo componente y podemos aplicar el teorema del valor medio unidimensional para derivadas a fin de obtener:

$$f(b_k+\lambda y_k u_k) - f(b_k) = \lambda y_k D_k f(a_k) \qquad (3.168)$$

Donde a_k pertenece al segundo rectilíneo que une b_k con $b_k + \lambda y_k u_k$. Obsérvese que $b \to$ c y por lo tanto $a_k \to 0$ cuando $\lambda \to 0$, puesto que cada $D_k f$ es continua en c para $k \geq 2$ podemos escribir:

$$D_k f(a_k) = D_k f(c) + E_k(\lambda), \text{ en donde } E_k(\lambda) \to 0 \text{ cuando } \lambda \to 0$$

Usando el resultado en (3.168) obtenemos que (3.165) se convierte en:

$$\begin{aligned} f(c+V) - f(c) &= \lambda \sum_{k=1}^{n} D_2 f(c) y_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_k E_k(\lambda) \\ &= \nabla f(c) \cdot V + |V| E_k(\lambda) \end{aligned} \qquad (3.169)$$

En donde,

$$E(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} y_k E_k(\lambda \to 0 \; (\lambda \to 0 \text{ cuando } |V| \to 0$$

Nota 3.1. La continuidad de n - 1, por lo menor de la derivada parciales $D_1 f, \cdots, D_n f$ en c, si bien es suficiente, no es necesario para la diferenciabilidad de f en c.

3.1.12. FUNCIÓN DE VALOR VECTORIAL, FUNCIÓN LINEAL

Sea $V_1 = f_1(x,y)$, $V_2 = f_2(x,y)$ una aplicación $(x,y) \to (V_1,V_2)$ definida en una vecindad del punto $a = (ab)$. Utilizando la notación vectorial: $x = (x,y)$; $V = (V_1,V_2)$; $f = (f_1,f_2)$ se puede expresar la aplicación en la forma mas corta $V = f(x)$.

Decimos que la función (del valor vectorial) f es continua en $a = (a,b)$ si:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(a) \quad \text{esto es} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Esto significa que:

$$|f(x,y) - f(a,b)| \to 0 \quad \text{cuando} \quad (x,y) \to (a,b)$$

Teniendo en cuenta:

$$|f_1(x,y) - f_1(a,b)| \leq \sqrt{\{f_1(x,y) - f_1(a,b)\}^2 + \{f_2(x,y) - f_2(a,b)\}^2}$$
$$= |f(x,y) - f(a,b)|$$
$$|f_2(x,y) - f_1(a,b)| \leq \sqrt{\{f_1(x,y) - f_1(a,b)\}^2 + \{f_2(x,y) - f_2(a,b)\}^2}$$
$$= |f(x,y) - f(a,b)|$$

Se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} f_1(x,y) \to f_1(a,b) \\ f_2(x,y) \to f_2(a,b) \end{Bmatrix} \text{ cuando } |f(x,y) - f(a,b) \to 0$$

Por otra parte, por la desigualdad.

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(a,b)| \quad &= \sqrt{\{f_1(x,y) - f_1(a,b)\}^2 + \{f_2(x,y) - f_2(a,b)\}^2} \\ &\leq |f_1(x,y) - f_1(a,b)| + |f_2(x,y) - f_2(a,b)| \end{aligned} \tag{3.170}$$

Tenemos también:

$$f(x,y) \to f(a,b) \text{ cuando } \begin{Bmatrix} f_1(x,y) \to f_1(a,b) \\ f_2(x,y) \to f_2(a,b) \end{Bmatrix}$$

Así, la continuidad de f(x,y) es equivalente:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_1(x,y) = f_1(a,b), \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f_2(x,y) = f_2(a,b) \tag{3.171}$$

Ósea, que las dos funciones f_1 y f_2 (llamadas las componentes de una función vectorial f) son continuas en el punto a =(a,b).

3.1.13. FUNCIÓN DE PRIMER GRADO

Si los dos componentes f_1 y f_2 de una función vectorial f son funciones de primer grado, se tendrá en el punto a=(a,b)

$$f_1(x,y) = \alpha x + \beta y + c_1$$

$$f_2(x,y) = \lambda x + \gamma y + c_2 \tag{3.172}$$

Así que para cualquier punto a = (a,b) se tiene que:

$$f(x,y) - f(a,b) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) - f_1(a,b) \\ f_2(x,y) - f_2(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x-a) + \beta(y-b) \\ \lambda(x-a) + \gamma(y-b) \end{pmatrix} \tag{3.173}$$

Luego matricialmente se toma la forma:

$$f(x,y) - f(a,b) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x-a) \\ (y-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \gamma \end{pmatrix} ((x,y) - (a,b)) \quad (3.174)$$

Escogiendo la constante M como el caso anterior, se tiene que:

$$|f(x,y) - f(a,b)| \leq 2M|(x,y) - (a,b)| \quad (3.175)$$

Esta nos demuestra que una función de primer grado es continua en cualquier punto del plano. Derivando parcialmente las dos funciones f_1 y f_2 obtenemos:

$$D_1 f_1 = \alpha \qquad D_2 f_1 = \beta \qquad D_1 f_2 = \lambda \qquad D_2 f_2 = \gamma \quad (3{,}176)$$

Luego,

$$f(x,y) - f(a,b) = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{pmatrix} ((x,y) - (a,b)) \quad (3.177)$$

3.1.14. COMPOSICIÓN DE DOS FUNCIONES DE PRIMER GRADO

Sean f:$x = (x,y) \rightarrow V = (V_1,V_2)$, y $\boldsymbol{g}$:$V = (V_1,V_2) \rightarrow w = (w_1,w_2)$ dos funciones lineales.

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \lambda x + \gamma y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$g(V_1,V_2) = \begin{pmatrix} g_1(V_1,V_2) \\ g_2(V_1,V_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} V_1 + \tilde{\beta} V_2 \\ \tilde{\lambda} V_1 + \tilde{\gamma} V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (3.178)$$

Componiendo las dos funciones f y $\boldsymbol{g}$ se tiene la función compuesta. $h : x \rightarrow w$. Así,

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{pmatrix} g_1(f_1(x,y), f_2(x,y)) \\ g_2(f_1(x,y), f_2(x,y)) \end{pmatrix} \quad (3.179)$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \lambda x + \gamma y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.1.15. REGLA DE LA CADENA

Sea f: $x(x,y) \rightarrow V(v_1,v_2)$, $\boldsymbol{g}$: $V \rightarrow w(w_1,w_2)$ dos funciones de valor vectorial, componiendo f y g se tiene la función compuesta $h = \boldsymbol{g} \circ f$.

Supongamos que f es diferenciable en $a = (a,b)$ y $\boldsymbol{g}$ es diferenciable en $c = f(a,b)$, vamos a estudiar la diferenciabilidad de la compuesta $h = \boldsymbol{g} \circ f$.

La diferenciabilidad es:

$$f(x,y) - f(a,b) \approx f'(a,b)\big((x,y) - (a,b)\big)$$

Con $c = f(a,b)$

$$g(V_1,V_2) - g\big(f(a,b)\big) \approx g'\big(f(a,b)\big)\big((V_1,V_2) - f(a,b)\big) \qquad (3.181)$$

Luego se tendrá, reemplazando $V = f(x)$, $V = (V_1,V_2) = f(x,y)$

$$\begin{aligned} g\big(f(x,y)\big) - g\big(f(a,b)\big) &\approx g'\big(f(a,b)\big)\big(f(x,y) - f(a,b)\big) \\ &\approx g'\Big(f(a,b)\Big(f'(a,b)\big((x,y) - (a,b)\big)\Big)\Big) \end{aligned} \qquad (3.182)$$

Ósea,

$$h(x,y) - h(a,b) \approx g'\big(f(a,b)\big) \cdot f'(a,b)\big((x,y) - (a,b)\big) \qquad (3.183)$$

Así se puede imaginar fácilmente la diferenciabilidad de la compuesta $h = \boldsymbol{g} \circ f$ y $h'(a,b) = \boldsymbol{g}'(f(a,b))f'(a,b)$ se conoce con el nombre de la regla de la cadena.

Ejemplo 3. 40. Si $f = (f_1,f_2)$, $\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2)$ $h = \boldsymbol{g} \cdot f = (h_1,h_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned} h_1(x,Y) &= g_1\big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big) \\ h_2(x,Y) &= g_2\big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big) \end{aligned} \qquad (3.184)$$

Por regla de la cadena.

$$\begin{pmatrix} D_1h_1, D_2h_1 \\ D_1h_2, D_2h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1g_1, D_2g_1 \\ D_1g_2, D_2g_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1f_1, D_2f_1 \\ D_1f_2, D_2f_2 \end{pmatrix} \qquad (3.185)$$

Luego,

$$\begin{aligned} D_1h_1 &= (D_1g_1)(D_1f_1) + (D_2g_1)(D_1f_2) \\ D_2h_1 &= (D_1g_1)(D_2f_1) + (D_2g_1)(D_2f_2) \end{aligned} \qquad (3.186)$$

Ejemplo 3.41. Sea C la curva definida por:

$$\begin{Bmatrix} y = r\sin\theta \\ x = r\cos\theta \\ z = x^2 + y^2 \end{Bmatrix}$$

Solución: sea T una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

(r,θ) → T(r,θ) = (x,y) =(rcosθ,rsinθ)

$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \tag{3.187}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = (2x)(\cos\theta) + (2y)(\sin\theta)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} &= 2(r\cos\theta)(\cos\theta) + 2(r\sin\theta)(\sin\theta)\\ &= 2r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\\ &= 2r\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = (2x)(-r\sin\theta) + (2y)(r\cos\theta)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} &= 2(r\cos\theta)(-r\sin\theta) + 2(r\sin\theta)(r\cos\theta)\\ &= 2r^2(\cos\theta + \sin\theta) + 2r^2(\cos\theta + \sin\theta)\\ &= 0\end{aligned}$$

Segunda derivada.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial r})}{\partial r} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial r})}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial r})}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial r})}{\partial r} = 2\cos\theta\cos\theta + 2\sin\theta\sin\theta = 2^{A} + B$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial \theta})}{\partial \theta} &= \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial \theta})}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial \theta})}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}\\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n)\end{aligned} \tag{3.188}$$

Ejemplo 3.42. Sea z = f(x,y), x = rcos θ, y = rsinθ

Demostrar que: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$

Solución: demostrar: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 \tag{3.189}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$\frac{\partial f}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2=(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y})^2$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2=\cos^2\theta(\frac{\partial f}{\partial x})^2+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\sin^2\theta(\frac{\partial f}{\partial y})^2$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2=((-r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y})$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2=r^2\sin^2\theta(\frac{\partial f}{\partial x})^2+r^2\cos^2\theta(\frac{\partial f}{\partial y})^2-2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$$

Luego,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2=\cos^2\theta(\frac{\partial f}{\partial x})^2+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\sin^2\theta(\frac{\partial f}{\partial y})^2$$
$$+\frac{r^2}{r^2}(\sin^2\theta(\frac{\partial f}{\partial x})+\cos^2\theta(\frac{\partial f}{\partial y})-2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y})$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\frac{\partial f}{\partial x})^2 \quad (27$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2=(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2=(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2 \tag{3.190}$$

3.1.16. CAMBIO DE ORDEN EN LAS DERIVADAS PARCIALES

Sea *f(x,y)* una función de valor real, derivable parcialmente con respecto a *(x,y)* con respecto a y en una vecindad del punto (a,b) considerando $D_1 f(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}$, $D_2 f(x,y)$ $\frac{\partial f}{\partial x}$,como funciones de (x,y) podemos pensar en las derivadas parciales de estas, así se obtienen las cuatro derivadas parciales de 2° orden.

$$\begin{aligned}
D_1D_1f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_{1,1}f(x,y) \\
D_2D_1f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial y\,\partial x} = D_{2,1}f(x,y) \\
D_1D_2f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x\,\partial y} = D_{1,2}f(x,y) \\
D_2D_2f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D_{2,2}f(x,y)
\end{aligned} \tag{3.191}$$

Se conoce que las dos derivadas parciales mixtas $D_{1,2}\, f$ y $D_{2,1}\, f$ son iguales bajo ciertas condiciones adicionales.

Ejemplo: 3.43.

$$f(x,y) = (x^2 - y)\, e^{x+y}$$

$D_1 f = (x^2 + 2x - y)\, e^{(x+y)}$; $D_2 f = (x^2 - y - 1)\, e^{x+y}$

$D_{2,1}\, f = (x^2 + 2x - y - 1)\, e(x + y)$; $D_{1,2}\, f = (x^2 + 2x - y)\, e^{x+y}$

En este ejemplo se ve que $D_{2,1}\, f = D_{1,2}$

Ejemplo 3.44. Sea: $f(x,y) = \frac{xy(x-y^2)}{x+y^2}$ $\quad si \quad (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$

Solución: Si $(x,y) \neq (0,0)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
D_1f(x,y) &= \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2} \\
D_2f(x,y) &= \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.192}$$

También en (0,0) las derivas parciales son:

$$\begin{aligned}
D_1f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \\
D_2f(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k) \quad f(0,0)}{k} = 0
\end{aligned} \tag{3.193}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
D_{2,1}f(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{D_1f(0,k) - D_1f(0,0)}{k} \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{-k^5}{k^4}\cdot\frac{1}{k} = -1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_{1,2}f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{D_2f(h,0)-D_2f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^5}{h^4}\cdot\frac{1}{h} = -1
\end{aligned} \tag{3.194}
$$

En este ejemplo se ve que:

$$D_{2,1}f(0,0) = D_{1,2}\,f(0,0) \tag{3.195}$$

Ejemplo 3.45. Sea $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$,

Hallar $D_{1,2}f(0,0)$, $D_{2,1}f(0,0)$.

Solución:

Sea f:$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función definida por:

$$
f(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \end{cases} \tag{3.196}
$$

Hallemos D_1f y D_2f, esto es:
Si $(x,y)\neq(0,0)$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
D_1f(x,y) &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\
&= \frac{(2x)y(x^2+y^2)-(2y)(x^2y)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{2x^3y+2xy^3-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{2x^3y+2xy^3-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.197}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2f(x,y) &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\
&= \frac{x^2(x^2+y^2)-2y(x^2y)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^4y+x^2y^2-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.198}
$$

Hallemos las derivadas parciales en (0,0)

$$\begin{aligned} D_1 f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \\ D_2 f(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0 \end{aligned} \tag{3.199}$$

Hallemos $D_{1,2}f(0,0)$ y $D_{2,1}f(0,0)$:

$$\begin{aligned} D_{1,2} f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{D_2 f(h,0)-D_2 f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1-0}{h} = 0 \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h} = \infty \\ D_{2,1} f(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{D_1 f(0,k)-D_1 f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0 \end{aligned} \tag{3.200}$$

$$\begin{aligned} D_2 f(h,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{\frac{h^2 k}{h^2+k^2}-0}{k} \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{h^2}{h^2+k^2} = 1 \end{aligned} \tag{3.201}$$

Ejemplo 3.46. Si $\tan^{-1}(V) = \int \left(\frac{1}{1+V^2}\right) dV$ y $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad xy = 0 \\ x^2\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) - y^2\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right), & \text{si} \quad xy \neq 0 \end{cases}$$

Hallar $D_{1,2}\, f(0,0)$ y $D_{2,1}f(0,0)$.

Solución: hallemos $D_1 f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$:

$$D_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \left[(2x)\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right)\right] - y^2 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$$

$$D_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \left[2x\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right] - \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

$$D_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y \tag{3.202}$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} - \left[2y\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right) \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right)\right]$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^3}{x^2+y^2} - 2y\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2 x}{x^2+y^2}$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} - 2y\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{3.203}$$

Hallemos D_1 f y D_2 f:

$$\begin{aligned} D_1 f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \\ D_2 f(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0 \end{aligned} \tag{3.204}$$

Hallemos $D_{1,2}f(0,0)$ y $D_{2,1}f(0,0)$:

$$\begin{aligned}
D_{1,2}f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{D_2f(h,0)-D_2f(0,0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-0}{h}=0\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}=\infty\\
D_{2,1}f(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{D_1f(0,k)-D_1f(0,0)}{h}\\
&= \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0
\end{aligned} \tag{3.205}$$

REFERENCIAS

Anton, H., Bivens I. y Davis S. (2009). ***Cálculo multivariable***. Drexel University, Davidson College, Limusa Wiley. (2.ª ed.).

Apostol, T. M. (2010). *Calculus II, Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differencial Equations and Probability*. Editorial Reverté. (2.ª ed.).

Ayres, F., & Mendelson Jr. E. (2001). ***Cálculo, Dickinson College***. Queens College. (4.ª ed.). McGraw-Hill.

Edwards, C.H., & Penney D. E. (2008). Calculus Early Transcendentals, Athens, the University of Georgia. Pearson- Prentice Hall. (7nd ed.).

Stewart J. (2012), Cálculo de Varias Variables. Trascendentes Tempranas, Ed Cengage Learning (7 Ed)

Takeuchi, Y. (1975). ***Análisis de varias variables***. Universidad Nacional de Colombia, V Coloquio Colombiano de Matemáticas. (1.ª ed.).

Zill, D. G. (2012). ***Cálculo con geometría analítica.*** Loyola-Marymount University. Grupo Editorial Iberoamérica. (7nd ed.).

Universidad Nacional
Abierta y a Distancia
Sello Editorial

**UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA
Y A DISTANCIA (UNAD)**

Sede Nacional José Celestino Mutis
Calle 14 Sur 14-23
PBX: 344 37 00 - 344 41 20
Bogotá, D.C., Colombia

www.unad.edu.co

9 789586 518482