



Universidad Nacional
Abierta y a Distancia

Sello Editorial

CURSO BÁSICO DE ECONOMETRÍA CLÁSICA

Cristian Orlando Avila Quiñones - UNAD
Nilton Marques de Oliveira - UFT



CURSO BÁSICO DE ECONOMETRÍA CLÁSICA

Cristian Orlando Avila Quiñones - UNAD

Nilton Marques de Oliveira - UFT

Grupo de Investigación: QUIRÓN de ECACEN COL0103217

Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD

Jaime Alberto Leal Afanador
Rector

Constanza Abadía García
Vicerrectora académica y de investigación

Leonardo Yunda Perlaza
Vicerrector de medios y mediaciones pedagógicas

Leonardo Evemeleth Sánchez Torres
Vicerrector de desarrollo regional y proyección comunitaria

Édgar Guillermo Rodríguez Díaz
Vicerrector de servicios a aspirantes, estudiantes y egresados

Luigi Humberto López Guzmán
Vicerrector de relaciones internacionales

Miriam Leonor Torres Pérez
Decana Escuela de Ciencias de la Salud

Clara Esperanza Pedraza Goyeneche
Decana Escuela de Ciencias de la Educación

Alba Luz Serrano Rubiano
Decana Escuela de Ciencias Jurídicas y Políticas

Sandra Milena Morales Mantilla
Decana Escuela de Ciencias Sociales, Artes y Humanidades

Claudio Camilo González Clavijo
Decano Escuela de Ciencias Básicas, Tecnología e Ingeniería

Julialba Ángel Osorio
Decana Escuela de Ciencias Agrícolas, Pecuarias y del Medio Ambiente

Sandra Rocío Mondragón
Decana ECACEN - Escuela de Ciencias Administrativas,
Contables, Económicas y de Negocios

Curso básico de econometría clásica

Autores:

Cristian Orlando Avila Quiñones - UNAD

Nilton Marques de Oliveira - UFT

Grupo de Investigación: QUIRÓN de ECACEN COL0103217

330.015 195

A958

Curso básico de econometría clásica / Avila Quiñones, Cristian Orlando, Nilton Marques de Oliveira. [1.a. ed.]. Bogotá: Sello Editorial UNAD/2019. (Escuela de Ciencias Administrativas, Contables, Económicas y de Negocios - ECACEN)

ISBN: 978-958-651-716-4

e-ISBN: 978-958-651-717-1

1. ECONOMETRÍA 2. MODELOS DE REGRESIÓN 3. ÁLGEBRA MATRICIAL 4. REGRESIÓN LINEAL I. Avila Quiñones, Cristian Orlando II. Marqués de Oliveira, Nilton III. Título.

ISBN: 978-958-651-716-4

E-ISBN: 978-958-651-717-1

Escuela de Ciencias Administrativas, Contables, Económicas y de Negocios - ECACEN

Diseño y diagramación

Diana Fernanda Ávila Ibáñez

Sergio Andrés Toscano Suanca

Corrección de textos

Marcela Guevara

Impresión

Hipertexto - Netizen

©Editorial

Sello Editorial UNAD

Universidad Nacional Abierta y a Distancia

Calle 14 sur No. 14-23

Bogotá, D.C.

Diciembre de 2019

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons–Atribución – No comercial – Sin Derivar 4.0 internacional. https://co.creativecommons.org/?page_id=13.



CONTENIDO

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN A LA ECONOMETRÍA

1.1 ¿Qué es econometría?	19
1.2 Tipos de econometría	20
1.3 Metodología de la teoría clásica	20
1.3.1 Elección del campo de aplicación	21
1.3.2 Especificación de un modelo inicial teniendo en cuenta la teoría y el conocimiento del tema	21
1.3.3 Búsqueda y depuración de datos	23
1.3.4 Aplicación de un programa de computador para estimar los parámetros del modelo.....	25
1.3.4.1 Tipos de información.....	25
1.3.4.2 Tipos de variables.....	26
1.3.5 Análisis de regresión.....	27
1.3.5.1 Papel de los modelos econométricos.....	29
1.3.5.2 Modelo de regresión múltiple-especificación	29
1.3.6 Modelo lineal general	30
1.3.7 Formas funcionales de los modelos de regresión	30
1.3.7.1 El modelo lineal-lineal	31
1.3.7.2 El modelo log-lineal	32
1.3.7.3 El modelo log-log.....	33
1.3.7.4 El modelo lin-log	34
1.3.8 Modelo de regresión múltiple	35
1.3.9 Supuestos del modelo.....	35

CAPÍTULO 2

CÁLCULO DE LA MUESTRA

2.1 Los valores k más utilizados y sus niveles de confianza 38

CAPÍTULO 3

REQUERIMIENTOS MÍNIMOS DE ÁLGEBRA MATRICIAL

3.1 Concepto 41

3.1.1 Orden de la matriz 42

3.2 Tipos de matrices..... 42

3.2.1 Matrices rectangulares..... 42

3.2.1.1 Vector fila: 43

3.2.1.2 Vector columna: 43

3.2.1.3 Vector unidad: 43

3.2.1.4 Vector suma: 43

3.2.1.5 Vector nulo: 44

3.2.2 Matrices cuadradas..... 44

3.2.2.1 Triangular superior..... 44

3.2.2.2 Triangular inferior..... 45

3.2.2.3 Simétrica..... 45

3.2.2.4 Antisimétrica..... 45

3.2.2.5 Diagonal..... 46

3.2.2.6 Escalar..... 46

3.2.2.7 Identidad..... 46

3.3 Operaciones entre matrices 47

3.3.1 Transposición..... 47

3.3.2 Suma..... 47

3.4 Producto entre matrices..... 47

3.4.1 Una escalada de una matriz es cualquier número real 48

3.4.2 Productos entre matrices.....	48
3.4.2.1 Producto de un vector fila por un vector columna	49
3.4.2.2 Producto de un vector columna por un vector fila	49
3.4.2.3 Vector fila por matriz.....	50
3.4.2.4 Matriz por vector columna	50
3.4.2.5 Matriz por matriz	50
3.4.3 Propiedades.....	51
3.5 Determinante de una matriz	51
3.5.1 Sarrus, método de diagonalización	52
3.5.2 Método de expansión de cofactores Laplace	53
3.5.3 Propiedades de los determinantes.....	56
3.6 Matriz inversa.....	56
3.6.1 Método de la adjunta	56
3.6.2 Propiedades de la inversa	59
3.6.3 Aplicaciones económicas de la inversa.....	60
3.6.3.1 El análisis de la matriz insumo producto	60
3.6.3.2 Sistemas de ecuaciones lineales simultáneas -SELS.....	61
3.6.4 Métodos de solución	62
3.6.4.1 La solución con Cramer	63
3.6.4.2 La solución con la inversa	65
Taller	68

CAPÍTULO 4

ESTIMACIÓN DE MODELOS ECONÓMICOS

4.1 Estimación de parámetros por MCO	73
4.2 Propiedades de los estimadores de los parámetros	77
4.3 Coeficiente de determinación.....	78
4.3.1 Si el modelo tiene término independiente el R^2 se calcula:	79
4.3.2 Coeficiente de determinación ajustado	79
4.4 Coeficiente de correlación simple y parcial.....	79

4.4.1 Coeficiente de correlación simple: mide el grado de asociación lineal entre X y Y.....	79
4.4.2 Coeficiente de correlación parcial.....	80
4.5 Estimación por intervalos	80
4.6 Contrastes de significancia estadística de parámetros.....	80
4.7 Contrastes de significancia	80
4.7.1 Contraste de significancia individual.....	81
4.7.2 Contraste de significancia global.....	81
4.7.3 Contraste de significancia para un subconjunto de parámetros.....	81
4.7.4 Modelo restringido.....	81
4.8 Test de hipótesis para un conjunto de restricciones lineales.....	81
4.9 Predicción	82
4.10 Contraste de hipótesis estructurales del modelo	82
4.10.1 Muestras pequeñas	82
4.10.2 Cambio estructural	83
4.10.2.1 Cómo detectar el cambio estructural	83
4.10.2.2 Para solucionar el cambio estructural.....	83
4.10.3 Especificación errónea.....	84
4.10.4 Multicolinealidad -MC	84
4.10.4.1 MC exacta.....	84
4.10.4.2 MC aproximada	84
4.10.4.3 Cómo detectar la multicolinealidad	85
4.10.4.4 Tratamiento de variables ficticias o variables <i>dummy</i>	85
4.11 Contraste de hipótesis sobre la perturbación aleatoria	86
4.11.1 Heterocedasticidad	86
4.11.1.1 Cómo detectar la heteroscedasticidad.....	86
4.11.1.2 Posibles soluciones de la heteroscedasticidad.....	87
4.11.2 Autocorrelación	87
4.11.2.1 Cómo detectar la autocorrelación.....	87
4.11.2.2 Método de Durbin Watson	88
4.11.2.3 Posibles soluciones para la autocorrelación.....	89
4.11.3 No normalidad	89
Taller	90
Solución	91

CAPÍTULO 5

SERIES DE TIEMPO

5.1 Formas de analizar una serie	104
5.2 Componentes de una serie	104
5.2.1 Componente de tendencia	104
5.2.2 Componente de estacionalidad	105
5.2.3 Componente cíclico	105
5.2.4 Componente irregular	106
5.3 Promedios móviles para el suavizado de series	106
5.3.1 Pasos para el cálculo de índices estacionales, desestacionalización de series y predicción.....	107
5.4 Series de tiempo vistas como procesos estocásticos	110
5.4.1 Procesos estocásticos	110
5.4.2 Hipótesis simplificadoras	111
5.4.3 Uso de operadores retraso	111
5.4.4 Polinomios de retraso.....	112
5.5 Modelos más utilizados en series de tiempo	112
5.5.1 Autorregresivos.....	112
5.5.2 Promedios móviles:	113
5.5.3 Autorregresivos de promedios móviles	113
5.5.4 Operador de diferencia	114
5.6 Ecuaciones en diferencias estocásticas	115
5.6.1 Ecuación en diferencia de primer orden	115
5.6.1.1 Ecuación en diferencia de primer orden (solución particular).....	115
5.6.2 Ecuación en diferencia de segundo orden.....	117
5.6.3 Ecuación en diferencia caso general	118
5.7 Procesos estacionarios	118
5.7.1 Condiciones de estacionariedad	119
5.7.2 Coeficiente de correlación simple ρ	119
5.8 Función de autocorrelación simple -FAS.....	120
5.8.1 Proceso ruido blanco.....	121
5.8.2 Proceso homogéneo-integrado de orden 1	122

5.8.3 Integradas de orden 1	122
5.8.4 Procesos autorregresivos.....	123
5.8.4.1 Procesos AR de primer orden AR(1)	124
5.8.4.2 Procesos AR de segundo orden AR(2)	125
5.9 Función de autocorrelación parcial -FAP.....	125
5.9.1 Significancia de los φ_{kk}	128
5.9.2 Procesos media móvil -MA.....	128
5.9.2.1 Proceso MA(1).....	128
5.9.2.2 Proceso MA(2)	129
5.9.2.3 Proceso ARMA.....	129
5.9.2.3.1 Proceso ARMA(1, 1)	129
5.10 Procesos para series no estacionarios.....	130
5.10.1 Paseo aleatorio	131
5.10.2 Proceso ARIMA.....	131
5.10.3 Construcción de modelos de series de tiempo por la metodología Box-Jenkins (1970).....	132
5.10.3.1 Identificación	133
5.10.3.2 Estimación	133
5.10.3.3 Diagnóstico o chequeo	134
5.10.4 Formas de hacer chequeo del modelo.....	134
5.10.4.1 La FAS en los residuos.....	134
5.10.4.1.1 Ljung-Box.....	135
5.10.4.1.2 Uso de los residuales para modificar el modelo	135
5.10.4.2 Gráfico de los residuos contra el tiempo.....	136
5.10.4.3 Técnica de sobreestimación.....	136
5.10.5 Criterios de selección de modelos	137
5.11 Series de tiempo estacionales	138
5.11.1 Forma general de un ARIMA estacional.....	138
5.11.1.1 SARIMA(p, d, q) (P, D, Q)S	138
5.11.2 Identificación de procesos estacionales.....	139
5.12 Predicción con modelos de series de tiempo.....	140
5.12.1 Predicción con un modelo AR(1)	140
5.12.2 Predicción con un modelo MA(1).....	140
5.12.3 Predicción con un modelo ARMA(1,1)	141

5.12.4 Varianza del error de predicción.....	141
5.12.4.1 Modelo AR(1)	141
5.12.4.2 Modelo MA(1).....	141
5.12.4.3 Modelo ARMA(1,1)	141
5.13 Predicción en series no estacionarias.....	142
5.13.1 Raíz unitaria	142
5.13.2 Phillips-Perron	143
5.13.3 Raíces unitarias estacionales	143
5.13.4 Perron en presencia de cambios estructurales.....	144
5.13.4.1 Perron paso a paso	144
5.14 Análisis de intervención.....	145
5.14.1 Análisis de intervención y función de transferencia	145
 APÉNDICE 1	
PAQUETE DE SOFTWARE GRETl	147
 APÉNDICE 2	
GRAFICAR UN DIAGRAMA DE DISPERSIÓN	155
 APÉNDICE 3	
DETERMINANTE	159
 APÉNDICE 4	
OPERACIONES DEL PRIMER EJEMPLO DEL CAPÍTULO 4.	163
 ANEXO 1	
TABLA T DE DISTRIBUCIÓN	173
 ANEXO 2	
TABLA F DE DISTRIBUCIÓN	175
 BIBLIOGRAFÍA.....	177

PRESENTACIÓN

El trabajo que se presenta pretende, en primer lugar, servir de guía a todo estudiante que se inicie en el amplio campo de los métodos econométricos; en segundo, despertar el interés de los estudiantes para que aprovechen sus conocimientos de la matemática y la estadística para profundizarlos y aplicarlos en la ciencia económica. Para ello, se presenta una introducción básica, pero rigurosa, a los métodos cuantitativos, álgebra matricial, estadística muestral y regresión lineal, como fundamentos en el análisis de datos de corte transversal y series de tiempo, profundizando en los problemas de multicolinealidad, heteroscedasticidad y autocorrelación en modelos de regresión simple, corridos en Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO). De igual forma se busca facilitar a los docentes un material que facilite la enseñanza en las aulas y sea estrictamente breve sobre los requerimientos mínimos para leer adecuadamente la econometría de Gujarati y Novalés.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, a mi Señor y a nuestra familia por ser el soporte principal de cualquier proyecto. En segundo lugar, a mis profesores, doctores WILLIAM CÁRDENAS MAHECHA, LEONARDO DUARTE y ADOLFO JUNCA RODRÍGUEZ, que contribuyeron con sus aulas de posgrado en la Universidad Nacional de Colombia y su instrucción en la realización de esta obra. A los profesores doctores SEGUNDO ABRAHÁN SANABRIA y WALDECY RODRIGUES profesores de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia y la Universidad Federal de Tocantins – Brasil, respectivamente, gracias por creer en esta obra.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LA ECONOMETRÍA

1.1 ¿Qué es econometría?

La econometría podría definirse literalmente como *medición económica*; no obstante, esta definición es bastante limitada ya que la econometría tiene un amplio alcance, por tanto, se define como una ciencia aparte porque es una amalgama de teoría económica, economía matemática, estadística económica y estadística matemática.

La teoría económica formula hipótesis o afirmaciones de tipo cualitativo, pero estas postulaciones no tienen mayor respaldo numérico. La economía matemática expresa en ecuaciones la teoría económica, pero sin verificar empíricamente la teoría. La estadística económica se relaciona prioritariamente con la recolección, el procesamiento y la presentación de datos estadísticos (gráficas, tablas, etc.), captura la información, pero no la aplica para validar las hipótesis o teorías de la ciencia económica. Finalmente, la estadística matemática proporciona

varias de las herramientas que utilizan los econométricos, pero se necesitan métodos especiales a razón de que la naturaleza única de la mayoría de estas cifras económicas no se genera como resultado de un experimento controlado. Todas y cada una de estas cifras hace la necesidad de la econometría como una disciplina de estudio en forma separada donde el objetivo de un ejercicio econométrico sea comprobar una teoría, confrontar una hipótesis económica o predecir o pronosticar.

1.2 Tipos de econometría

Se puede dividir la econometría en dos grandes grupos: la econometría aplicada y la econometría teórica; en cada grupo el enfoque puede ser clásico o bayesiano.



La econometría aplicada se utiliza para el campo especial de la economía, como es la función de producción, inversión, consumo, etc. La economía teórica es el desarrollo de métodos aplicables y apropiados para medir las relaciones económicas que ya se especifiquen según el modelo econométrico y es la que se trabaja en el presente libro dado que el método ampliamente utilizado es el de Mínimos Cuadrados Ordinarios -MCO; el enfoque es clásico y predomina en la investigación empírica.

1.3 Metodología de la teoría clásica

1. Elección del campo de aplicación
2. Especificación de un modelo inicial teniendo en cuenta la teoría y el conocimiento del tema
3. Búsqueda y depuración de datos

4. Aplicación de un programa de computador para estimar los parámetros del modelo
5. Pruebas de hipótesis para verificar la bondad del modelo e interpretación de resultados
6. Proceso de perfeccionamiento del modelo

Para ilustrar estos pasos, por ejemplo, podemos buscar la forma de explicar el comportamiento del consumo, entendiéndose como consumo el gasto personal durante un año. Ese consumo podría ser de comida, de vestuario o cualquier consumo que nos interese. Por tanto, nos basaremos en Gujarati¹, que considera la conocida teoría Keynesiana del Consumo, la cual es utilizada ampliamente por su facilidad de comprensión en cualquier curso de introducción a la econometría.

1.3.1 Elección del campo de aplicación

John Maynard Keynes postuló la *propensión marginal a consumir* -PMC, la cual es mayor que cero pero menor a uno ($0 < PMC < 1$); en términos psicológicos es de esperar que un individuo hombre o mujer aumente su nivel de consumo cuando ha experimentado un crecimiento en su ingreso, pero este incremento en su consumo no es en la misma cuantía del aumento de su ingreso.

1.3.2 Especificación de un modelo inicial teniendo en cuenta la teoría y el conocimiento del tema

Keynes no especifica la relación funcional precisa entre consumo e ingreso; para ello un economista matemático puede plantear lo siguiente:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X \quad 0 < \beta_2 < 1$$

¹ A pesar del gran universo de textos sobre econometría, el autor considera que la *Econometría* de Damodar Gujarati de la editorial Mc Graw Hill, 3ra edición, es la mejor para el propósito de este texto

Donde Y es el gasto de consumo, y se define como la variable dependiente o:

- Variable endógena
- Variable explicada
- Variable respuesta
- Regresando
- Variable predicha

X es el ingreso, y se define como la variable explicativa o:

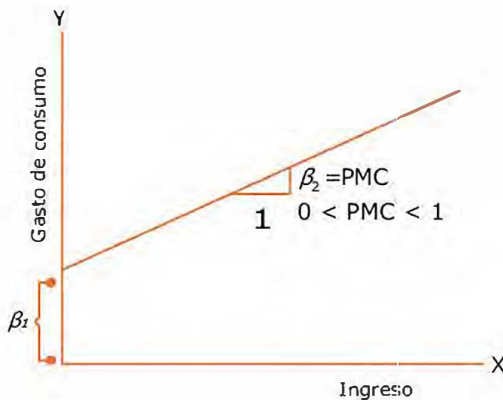
- Variable exógena
- Variable independiente
- Variable de control
- Regresor
- Variable predictora

(Siendo un asunto netamente personal la terminología utilizada en este texto para definir a Y y X, son variable dependiente y variable explicativa, respectivamente.)

y donde β_1 y β_2 se definen como los parámetros del modelo, donde β_1 es el coeficiente del intercepto y β_2 es el coeficiente de la pendiente que mide la PMC (ver imagen 1).

Así mismo, si los datos inician en el origen, no posee el coeficiente del intercepto y el modelo no debe llevar β_1 .

Imagen 1



La ecuación:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X \quad (1)$$

plantea que el consumo está relacionado linealmente con el ingreso (esta ecuación se define en economía como *la función consumo*); además se recalca que un modelo es simplemente un conjunto de ecuaciones y como el presente solo posee una ecuación se denomina *modelo uniecuacional*; si tuviera más ecuaciones sería un *modelo multiecuacional*.

1.3.3 Búsqueda y depuración de datos

La función de consumo (1), supone una relación determinística o exacta entre el consumo y el ingreso, lo que lo hace limitado (generalmente las relaciones entre variables económicas son inexactas)². Para ello, se debe incluir en la función determinística de consumo una variable aleatoria (*estocástica*³):

² Si aplicamos un censo o una encuesta a un grupo de la población con una muestra de 1.000 individuos colombianos cabeza de hogar y llegáramos a graficar estos datos, es de esperar que los datos queden dispersos a la línea recta de la imagen 2 dado que la relación consumo - ingreso planteada no es exacta; existen variables que interfieren en su comportamiento como es el caso de los miembros a cargo del hogar, la edad, la cultura, etc.

³ Variables aleatorias o estocásticas son variables que tienen distribuciones de probabilidad, como su raíz griega lo indica stokhos (centro del blanco); por ejemplo, el resultado de lanzar un tejo de cancha a cancha es un proceso estocástico. En otras palabras, es un proceso que permite errores. La variable aleatoria puede ser discreta o continua. Por ejemplo, si lanzamos

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u \quad (2)$$

Donde u es el término de *error* o el término de *perturbación estocástica* que representa todos aquellos factores que afectan a Y (Gasto de consumo) que no explica X (el ingreso); es decir, que u representa aquellos factores que no son considerados en el modelo en forma explícita.

Las fuentes del término de error son:

- Aleatoriedad en las respuestas humanas
- Efecto de un gran número de variables omitidas
- Errores de medición en Y
- No disponibilidad de información
- Forma funcional incorrecta

La ecuación (1) $Y = \beta_1 + \beta_2 X$ es un modelo económico y la ecuación (2) $Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$ es un modelo econométrico, técnicamente un ejemplo de un *modelo de regresión lineal* (véase el cuadro 1: la diferencia entre un modelo económico y uno econométrico).

Cuadro 1. Diferencia entre un modelo económico y uno econométrico

<p>El modelo económico tiene vocación de generalidad.</p> <p>ej. de modelo económico $Q_t = F(L, K)$.</p> <p>propone relaciones exactas.</p> <p>ej. $It = I \text{ no laborales} + \text{Salarios}$</p>	<p>El modelo econométrico</p> <p>Exige una especificación estadística.</p> <p>Precisa de las variables que lo componen y una forma funcional definida. μ</p>
---	---

Así mismo, como el texto se relaciona prioritariamente con modelos uniecuacionales y lineales, es relevante especificar la presencia de linealidad en los parámetros y en las variables.

- Linealidad en las variables
- Linealidad en los parámetros

2 dados, los cuales están numerados del 1 al 6, definimos X como la suma de los valores numéricos que adquieren los dados; si X toma el valor de algunos de los siguientes resultados: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 o 12 sería discreta, pero si presenta la posibilidad de tomar cualquier valor dentro de un intervalo de valores es continua.

1.3.4 Aplicación de un programa de computador para estimar los parámetros del modelo

Para poder estimar β_1 y β_2 (es decir, los valores numéricos) en la función de consumo $Y = \beta_1 + \beta_2 X$, es necesario poseer los respectivos datos; para ello, se toman el gasto de consumo personal agregado de la economía colombiana (como la variable Y) y el PIB (como variable X), siempre en términos *reales*, por lo cual los datos están con base en el año 2010 (se encuentran medidos en precios constantes). Del mismo modo, es crucial determinar para nuestro ejercicio, que los datos son de tipo *series de tiempo* y las variables son *cuantitativas* (por eso ambas variables están expresadas en miles de millones de pesos de 2010, véase la tabla 1)⁴.

1.3.4.1 Tipos de información

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$$

- Corte transversal: cuando se recoge información de una o más variables en el mismo momento del tiempo se define que la información es de corte transversal; por ejemplo el censo de población de 1993 en Colombia, o del 2005, una encuesta.
- Series de tiempo⁵: es un conjunto de observaciones sobre los valores que toma una variable a través del tiempo; de la misma manera, esta información se debe recopilar en intervalos de tiempo definidos; por ejemplo, anual (PIB), semestral, trimestral (inflación), mensual (tasas de desempleo), semanal o diario. Como recordatorio, nuestro ejemplo inicial es una serie de tiempo y la información es cuantitativa.

⁴ Estos datos se encuentran graficados en el apéndice 1, imagen 13.

⁵ En el capítulo 5 se realiza una introducción a la econometría de series de tiempo, la cual basa en gran parte su trabajo empírico en el supuesto de que las series son estacionarias. Básicamente una serie de tiempo es estacionaria si el valor de su media y varianza no cambian con el tiempo. Por ejemplo, si poseemos los datos de la variable desempleo de los periodos de tiempo (1975-1980) y (1985-2000), en los cuales calculamos individualmente media, varianza y covarianza a las 15 observaciones de los dos periodos y son iguales, la serie de tiempo de desempleo es estacionaria. Por tanto, cada vez que se trabaje con series de tiempo se debe revisar su estacionariedad.

- Panel: combinación de datos de corte transversal y de series de tiempo.

1.3.4.2 Tipos de variables

- Cuantitativas: ingreso, precios, oferta monetaria, etc.
- Cualitativas: variables dicótomas o categóricas; por ejemplo, hombre o mujer, emigrante o inmigrante, empleado o desocupado, casado o soltero, profesional o no profesional.
- Proxi.

Tabla 1. Información sobre Y (gasto de consumo personal) y X (PIB), 2005-2018, en miles de millones de pesos de 2010.

Año	X	Y
2005	182.228	151.476
2006	205.836	161.161
2007	231.215	172.738
2008	257.229	179.775
2009	271.379	181.466
2010	293.773	190.805
2011	334.297	203.377
2012	360.131	214.144
2013	385.951	222.684
2014	412.602	232.983
2015	435.202	240.188
2016	467.160	243.992
2017	497.669	249.031
2018	529.191	257.779

Fuente: Cálculos propios con base en DANE 2019 y Banco Mundial-indicadores 2019.

Teniendo los datos series de tiempo de la tabla 1, expresados anualmente, procedemos a estimar los parámetros de nuestra función de consumo. Para obtener dichos parámetros estimados se utiliza la técnica estadística denominada *análisis de regresión*, la cual es la herramienta prioritaria para el proceso de estimación.

1.3.5 Análisis de regresión

El análisis de regresión trata con la descripción y evaluación de las relaciones entre una variable determinada (llamada dependiente, explicada o endógena) y una o más variables adicionales (llamadas independientes, explicativas o exógenas).

Se reitera que, para poder realizar este análisis, se debe postular una relación funcional entre las variables. Debido a su simplicidad analítica, la forma funcional que más se utiliza en la práctica es la relación *lineal*. Cuando solo existe una variable independiente, esto se reduce a una línea recta:

$$\hat{Y} = \beta_1 + \beta_2 X \quad (3)^6$$

Recordemos que el parámetro β_1 es conocido como la “ordenada en el origen” y nos indica cuánto es Y cuando $X = 0$ mientras que el parámetro β_2 , es conocido como la “pendiente” y nos indica cuánto aumenta Y por cada aumento de una unidad en X . Nuestro problema consiste en obtener estimaciones de estos coeficientes a partir de una muestra de observaciones sobre las variables Y y X . En el análisis de regresión, estas estimaciones se obtienen por medio del método de *mínimos cuadrados*.

Al aplicar el método de MCO obtenemos:

$$\hat{Y} = 99099,6 + 0,3113X \text{ Resultado de la estimación}^7$$

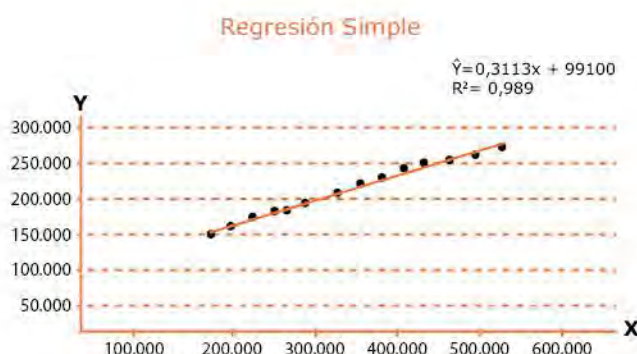
No obstante, debemos tener claro que nuestro primer ejemplo desarrollado es una sencilla **regresión simple** (2 variables); es decir, que para poder visualizar el grado de relación que existe entre las variables X frente a Y , como paso básico en el análisis, tocaría elaborar un *diagrama de dispersión* (puede realizarse en Excel), que es una representación, en un

⁶ El gorro ^ sobre Y indica que es un valor estimado.

⁷ Aunque al lector no debe preocuparle cómo se hallaron estos valores estimados y su debida interpretación, se recalca que el método de estimación de mínimos cuadrados ordinarios -MCO se aborda formalmente en el capítulo 4; igualmente, en el capítulo 3 se realiza una inducción amplia al ÁLGEBRA matricial, requerida para la comprensión máxima del método de MCO. Sin embargo, para aquellos lectores inquietos, se desarrolla esta regresión con un paquete econométrico conocido como gretl, en gran parte, porque es de fácil adquisición (gratuito en la Web); se encuentra en el Apéndice 1.

sistema de coordenadas cartesianas, de los datos numéricos observados. En el diagrama resultante, en el eje X se mide el PIB (2005-2018) y en el eje Y se mide el gasto de consumo personal agregado. Cada punto en el diagrama muestra la pareja de datos (PIB como medida de ingreso agregado y el gasto de consumo personal agregado) que corresponde a un año determinado. Como era de esperarse, existe una relación positiva entre estas variables: a una mayor cantidad de ingreso agregado corresponde un mayor nivel de gasto de consumo personal agregado.

Imagen 2



Por tanto, para el periodo 2005-2018 la pendiente (PMC) es de 0,31; es decir que en este periodo muestral un incremento de un peso colombiano en el ingreso real lleva en promedio un incremento de 31 centavos de peso en el gasto de consumo real⁸.

Finalmente, una pregunta importante que se plantea en el análisis de regresión es la siguiente: ¿Qué porcentaje de la variación total en Y se debe a la variación en X? En otras palabras, ¿cuál es la proporción de la variación total en Y que puede ser “explicada” por la variación en X? El estadístico que mide esta proporción o porcentaje se denomina coeficiente de determinación (R^2), el cual se calcula por medio de un paquete econométrico (véase Apéndice 1) o para el caso de nuestra regresión simple, Excel en Windows 10 (véase Apéndice 2).

El $R^2 = 0,98$ significa que la variación en el PIB explica el 98% de la variación del gasto de consumo personal agregado.

⁸ Recordando que la relación consumo e ingreso es inexacta, siempre se dice que un incremento o decrecimiento es en promedio, como se deduce en el Apéndice 1, imagen 2, que muestra la línea de regresión obtenida de $\hat{Y} = 99099,6 + 0,3113X$

Sin embargo, hasta aquí solo se ha considerado el ejemplo con regresión simple, es decir, planteando una relación única de explicación del gasto de consumo por el ingreso, pero como planteamos, esta relación no es del todo correcta; existen otras variables que intervienen en ello y por tanto requerimos más de una X_1 . Al trabajar con $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ (más de una variable independiente) es un caso de *regresión múltiple*, un cálculo bastante complicado y laborioso, por lo que se requiere del empleo de programas de computación especializados.

1.3.5.1 Papel de los modelos econométricos

A partir de los n datos del periodo muestral elegido ($t = 1, 2, 3, \dots, n$), el conocimiento de los coeficientes $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ nos permite realizar:

- Análisis estructural
- Predicción $Y_{t+1} = B_1 + B_2 X_{t+1} + B_3 Z_{t+1}$
- Evaluación de políticas o simulación de los efectos

1.3.5.2 Modelo de regresión múltiple-especificación

$$Y_i = F(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik}) + U_i$$

$$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \dots + \beta_k X_{ik} + U$$

- $i = 1, 2, \dots, n$

Expresión matricial

- $Y = X\beta + U$ **(4)** modelos no lineales

$$Y = \beta_1 + \beta_2 e^{\beta_3 X}$$

$$Y = \beta_1 X_2^{\beta_2} X_3^{\beta_3}$$

1.3.6 Modelo lineal general

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

"Se aplica de manera general a las ecuaciones inherentemente lineales"

Por ejemplo: $Y = \lambda_1 X_2^{\lambda_2} X_3^{\lambda_3} e^{\varepsilon}$

Se transforma $\log Y = \alpha_1 + \alpha_2 \log X_2 + \alpha_3 \log X_3 + \varepsilon$

Donde: $\alpha_1 = \log \lambda_1$ $\alpha_2 = \lambda_2$ $\alpha_3 = \lambda_3$ $\varepsilon = \log e^{\varepsilon}$

"Todos los modelos logarítmicos, semilogarítmicos y recíprocos son inherentemente lineales".

Alpha Chiang, 2007.

Un caso especial de un modelo inherentemente lineal es el "modelo de interacción":

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 (X_2 X_3) + \varepsilon$$

En este caso el efecto de X_2 sobre Y está dado por:

$$\beta_2 + \beta_4 X_3$$

El efecto de la variable X_2 en Y depende del nivel de la variable X_3 .

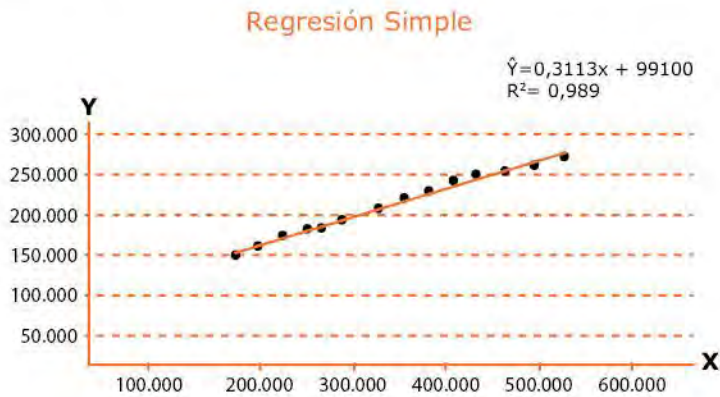
1.3.7 Formas funcionales de los modelos de regresión

Si recordamos los datos de nuestro ejemplo de la tabla 1, Información sobre Y (gasto de consumo personal) y X (PIB), 2005-2018, en miles de millones de pesos de 2010, partimos de 14 datos de la variable endógena y exógena (2005-2018) y buscamos encontrar la regresión que nos ofrezca la mejor relación en el R^2 , la cual es log-log:

1.3.7.1 El modelo lineal-lineal

Los datos sin ninguna alteración solo se grafican y se solicita la opción de regresión y presentar el R^2 .

Recordemos la imagen 2

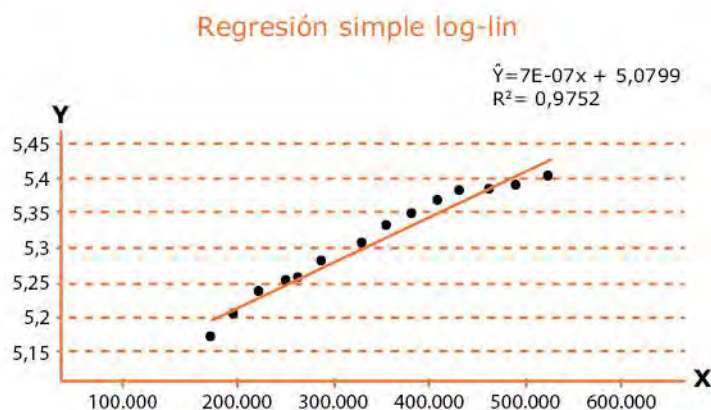


X	Y
182.228	151.476
205.836	161.161
231.215	172.738
257.229	179.775
271.379	181.466
293.773	190.805
334.297	203.377
360.131	214.144
385.951	222.684
412.602	232.983
435.202	240.188
467.160	243.992
497.669	249.031
529.191	257.779

1.3.7.2 El modelo log-lineal

Se aplicaron logaritmos a la variable endógena:

Imagen 3

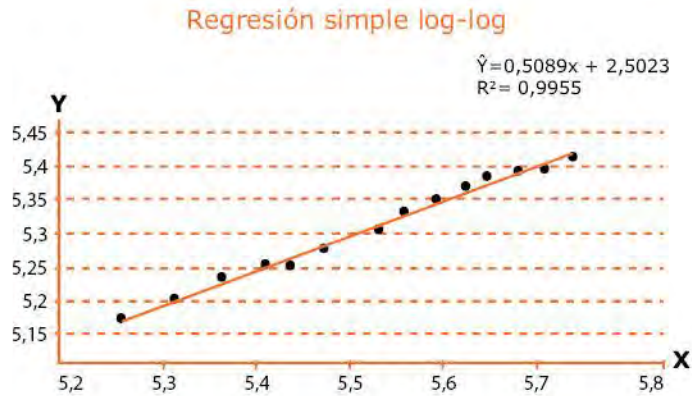


X	Y
182.228	5,18034521
205.836	5,20725892
231.215	5,23738699
257.229	5,25472856
271.379	5,25879628
293.773	5,28058919
334.297	5,30830274
360.131	5,33070677
385.951	5,34768994
412.602	5,36732454
435.202	5,38055131
467.160	5,38737503
497.669	5,39625293
529.191	5,41124719

1.3.7.3 El modelo log-log

Se aplicaron logaritmos a las variables endógena y exógena:

Imagen 4

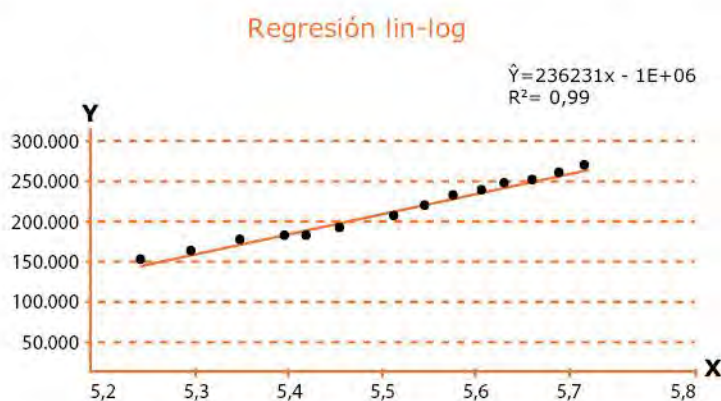


X	Y
5,26061538	5,18034521
5,31352085	5,20725892
5,3640169	5,23738699
5,41031934	5,25472856
5,43357654	5,25879628
5,46801152	5,28058919
5,52413279	5,30830274
5,55645996	5,33070677
5,58653269	5,34768994
5,61553092	5,36732454
5,63869128	5,38055131
5,66946575	5,38737503
5,696941	5,39625293
5,72361209	5,41124719

1.3.7.4 El modelo lin-log

Se aplicó logaritmo solo a la variable exógena; para ello, la variable endógena volvió a ser la inicial:

Imagen 5



X	Y
5.26061538	151.476
5.31352085	161.161
5.3640169	172.738
5.41031934	179.775
5.43357654	181.466
5.46801152	190.805
5.52413279	203.377
5.55645996	214.144
5.58653269	222.684
5.61553092	232.983
5.63869128	240.188
5.66946575	243.992
5.696941	249.031
5.72361209	257.779

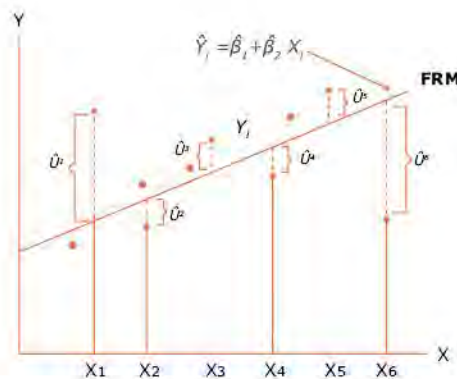
1.3.8 Modelo de regresión múltiple

Lo que se trata con los modelos de regresión es estimar la función de regresión poblacional (FRP) con base en la función de regresión muestral (FRM) en la forma más precisa posible.

La función de regresión poblacional (FRP) puede escribirse como $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \mu$ **(5)**

La función de regresión muestral (FRM), forma estocástica $Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \hat{\mu}$ **(6)**

Imagen 6



Nótese que se busca estimar la información de cada una de las X_i que no explican a Y_i ; es decir, estimar las μ_i de cada X_i .

1.3.9 Supuestos del modelo

1. $Y = X\beta + U$ linealidad del modelo de regresión
2. $E(U_i | X_i) = 0$
3.
$$\left. \begin{aligned} \text{VAR}(U_i | X) &= \sigma_\mu^2 \quad \text{para } i = 1, \dots, n \\ \text{COV}(U_i, U_j) &= 0 \quad \text{para } i \neq j \end{aligned} \right\} E(UU' | X) = \sigma_\mu^2 I_n$$
4. Muestra mínima
5. X fija $n \times k$ con rango k
6. $\mu \rightarrow N$
7. $\text{Cov}(U_i, X_j) = 0$
8. No multicolinealidad

CAPÍTULO 2

CÁLCULO DE LA MUESTRA⁹

El cálculo del tamaño de la muestra es uno de los aspectos para concretar en las fases previas de la investigación comercial y determina el grado de credibilidad que concederemos a los resultados obtenidos.

Una fórmula muy extendida que orienta sobre el cálculo del tamaño de la muestra para datos globales es la siguiente:

$$n = \frac{k^2 * p * q * N}{(e^2 * (N - 1) + k^2 * p * q)} \quad (2.1)^{10}$$

N: es el tamaño de la población o universo (número total de posibles encuestados).

k: es una constante que depende del nivel de confianza que asignemos. El nivel de confianza indica la probabilidad de que los resultados de nuestra investigación sean ciertos; un 95,5 % de confianza es lo mismo que decir que nos podemos equivocar con una probabilidad del 4,5%.

⁹ Para realizar el cálculo básico de la muestra existen varios simuladores gratuitos en la web; véase a través del enlace <https://www.feedbacknetworks.com/cas/experiencia/sol-preguntar-calculador.html>

¹⁰ Ecuación básica del cálculo de la muestra. <https://www.feedbacknetworks.com/cas/experiencia/sol-preguntar-calculador.html>

2.1 Los valores k más utilizados y sus niveles de confianza

El uso de internet y la comodidad que proporciona, tanto para el encuestador como para el encuestado, hacen que este método sea muy atractivo.

k	1.15	1.28	1.44	1.65	1.96	2	2.58
Nivel de confianza	75%	80%	85%	90%	95%	95.5%	99%

e: es el error muestral deseado. El error muestral es la diferencia que puede haber entre el resultado que obtenemos preguntando a una muestra de la población y el que obtendríamos si preguntáramos al total de ella. Ejemplos:

- Ejemplo 1: si los resultados de una encuesta electoral indicaran que un partido iba a obtener el 50% de los votos y el error estimado fuera del 4%, se estima que el porcentaje real de votos estará en el intervalo 46-54% (50% \pm 4%).
- Ejemplo 2: si los resultados de una encuesta dicen que 100 personas comprarían un producto y tenemos un error muestral del 10%, comprarán entre 90 y 110 personas.
- Ejemplo 3: si hacemos una encuesta de insatisfacción a los empleados con un error muestral del 5% y el 30% de los encuestados se muestran insatisfechos significa que entre el 35% y el 25% (30% \pm 5%) del total de los empleados de la empresa lo estarán.

p: es la proporción de individuos que poseen en la población la característica de estudio. Este dato es generalmente desconocido y se suele suponer que $p=q=0.5$, que es la opción más segura.

q: es la proporción de individuos que no poseen esa característica; es decir, es $1-p$.

n: es el tamaño de la muestra (número de encuestas que vamos a hacer).

Varios ejemplos:

- Ejemplo 1: para contrastar el porcentaje de personas de Colombia que ven un determinado programa de televisión. Si la población del país es 48 millones de personas y se estima que el 30% de la población ($p = 0,3$ y $q = 0,7$) ve el programa, con una confianza del 95% que determina que $k = 1,96$ y asumiendo un error muestral del 5% ($e = 0,05$), se necesitaría una muestra de 323 personas.
- Ejemplo 2: para realizar una encuesta de satisfacción a los clientes de un vehículo Nissan March del que se han vendido 20.000 unidades (N), con una confianza del 90% que determina que $k = 1.65$, un error muestral del 5% ($e = 0,05$) y considerando que estarán satisfechos un 60% ($p = 0,6$ y $q = 0,4$), se necesitaría una muestra de 258 clientes.

Para el caso de hacer un muestreo estratificado debemos asegurarnos de que escogemos un número de elementos suficiente de cada grupo. Este tipo de muestreo no toma la población como un todo sino en varios grupos con características distintas entre ellos (por ejemplo, edad entre 20-35, 35-50, 50-65 y más de 65).

De todos modos, para calcular el tamaño de la muestra habitualmente se usan criterios prácticos basados en la experiencia o la simple lógica. Algunos de los métodos más usados son los siguientes:

1. El presupuesto del que dispongamos para la investigación.
2. La experiencia en estudios similares.
3. La representatividad de cada grupo considerado: escoger de cada uno de ellos un número suficiente de encuestados para que los resultados sean indicativos de la opinión de ese grupo.

CAPÍTULO 3

REQUERIMIENTOS MÍNIMOS DE ÁLGEBRA MATRICIAL

- Concepto, notación, elementos y orden de una matriz
- Tipos de matrices
- Operaciones entre matrices

3.1 Concepto

Conjunto ordenado de elementos numéricos o alfanuméricos dispuestos en filas y en columnas; las filas por lo general se denominan con la letra m y las columnas con la letra n . Las filas aumentan de arriba hacia abajo y las columnas de izquierda a derecha. Una matriz se nota con la letra mayúscula del alfabeto castellano; para ubicar los elementos se utiliza paréntesis redondo () o cuadrado [].

Ejemplo: $A = (a_{ij})$, donde a = nos indica el lugar que ocupa el elemento dentro de la matriz donde i = es la fila y j = es la columna.

$$A = (a_{ij}) = \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{columnas } n \\ \text{filas } m \end{array}$$

$m \times n$

Siempre se nota la fila y luego la columna.

3.1.1 Orden de la matriz

Indica el orden de la fila y columnas que conforman la matriz:

$$\text{Ejemplo: } A = \begin{vmatrix} 23 & 9 & 7 & 94 \\ 45 & 21 & 34 & 2 \\ 6 & 65 & 23 & 10 \end{vmatrix}$$

El orden es = 3×4

Es decir, Una matriz de 3 filas por 4 columnas.

3.2 Tipos de matrices

De acuerdo con las filas y columnas pueden ser:

3.2.1 Matrices rectangulares.

Aquellas donde el número de filas es diferente al número de columnas.

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad A = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 8 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 0 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix}$$

3×2 2×3

Como casos particulares tendríamos:

3.2.1.1 Vector fila:

$$[a_{11} \ a_{12} \ a_{13}]_{1 \times n} \quad a = [2 \ 5 \ 3]_{1 \times 3}$$

3.2.1.2 Vector columna:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 36 \\ -7 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$m \times 1$ 4×1

3.2.1.3 Vector unidad:

Un elemento es la unidad y el resto son cero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = [1 \ 0 \ 0]_{1 \times 3}$$

4×1

3.2.1.4 Vector suma:

Vector fila o columna cuyos elementos son la unidad.

$$A = [1 \ 1 \ 1]_{1 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3×1

3.2.1.5 Vector nulo:

Los vectores son cero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = [1 \ 0 \ 0] \quad 1 \times 3$$

3×1

3.2.2 Matrices cuadradas.

En general se denomina así a aquel número de filas y columnas que es igual.

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

13	24	3
12	32	1
4	5	8

3×3

Tipos de matrices:

3.2.2.1 Triangular superior.

Matriz cuyos elementos por encima de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \mathbf{a_{44}} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \\ 6 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 13 & -5 & \mathbf{7} & 0 \\ 9 & 8 & 23 & \mathbf{8} \end{bmatrix}$$

4×4 4×4

3.2.2.2 Triangular inferior.

Matriz cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 74 & 0 & 16 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

4x4

3.2.2.3 Simétrica.

Es una matriz cuadrada en la que los elementos por debajo y por encima de la diagonal principal son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 8 & 5 & -3 \\ 4 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

4x4

Ojo $a_{12}=a_{21}$, $a_{23} = a_{32} \dots$

3.2.2.4 Antisimétrica.

Los elementos por encima o por debajo de la matriz principal son elementos recíprocos; es decir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & -10 \\ 1 & 0 & -5 & 3 \\ -4 & 5 & 0 & -6 \\ 10 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

4x4

Lo importante es que si por un lado es +, por el otro lado debe de ser -.

3.2.2.5 Diagonal.

Por encima o por debajo de la diagonal principal son ceros.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3x3

3.2.2.6 Escalar.

Matriz diagonal cuyos elementos son todos iguales en la diagonal principal.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

4x4

3.2.2.7 Identidad.

Matriz escalar cuyos elementos que la componen son la unidad.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3x3

3.3 Operaciones entre matrices

3.3.1 Transposición.

Es una operación que se hace sobre los elementos de una matriz; básicamente consiste en intercambiar las filas por las columnas, el resultado de una matriz con el orden intercambiado; es decir:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \rightarrow A' = (a_{ij})_{n \times m}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}_{4 \times 3} \quad A' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}_{3 \times 4}$$

3.3.2 Suma.

Se requieren mínimo de dos matrices; al estar definida entre matrices del mismo orden, la operación se realiza término a término.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 9 \\ 6 & 8 & 5 \end{vmatrix}_{3 \times 3} \quad B = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 13 \\ 1 & 7 & 26 \\ -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}_{3 \times 3} \quad A + B = \begin{vmatrix} 11 & 13 & 20 \\ 5 & 6 & 35 \\ 0 & 12 & 8 \end{vmatrix}_{3 \times 3}$$

En la resta sería $A + (-B)$ o $B + (-A)$.

3.4 Producto entre matrices

- Escalada de una matriz
- Producto entre matrices
- Propiedades

3.4.1 Una escalada de una matriz es cualquier número real

Matriz $A = (a_{ij})$, $\alpha = 5$, $\alpha \times A = B_{m \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha \times A = 5 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 25 \\ 20 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$M \times n$ 2×3 2×3

$\alpha = 5$, $\alpha \times A = B_{m \times n}$

3.4.2 Productos entre matrices

1. Producto de un vector fila por un vector columna
2. Producto de un vector columna por un vector fila
3. Vector fila por matriz
4. Matriz por vector columna
5. Matriz por matriz

Para poder efectuar el producto entre matrices, las dos matrices deben cumplir con la condición de *conformalidad*; si esta condición se da, la operación se efectúa multiplicando cada uno de los elementos de las filas de la matriz que premultiplica por cada uno de los elementos de la columna de la matriz que posmultiplica.

"Si el número de columnas de la matriz que premultiplica es igual al número de filas de la matriz que posmultiplica".

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ y una $B = (b_{ij})$

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

3.4.2.1 Producto de un vector fila por un vector columna

$$\begin{array}{rcl}
 A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & \\
 1 \times 4 & & 4 \times 1 \\
 C_n = ((1 \times 0) + (4 \times 5) + (3 \times 2) + (7 \times -1)) = 19 & & = 19
 \end{array}$$

El producto de un vector fila por un vector columna es un escalar.

3.4.2.2 Producto de un vector columna por un vector fila

$$\begin{array}{rcl}
 A = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \end{bmatrix} & \\
 4 \times 1 & 1 \times 4 & \\
 A_{4 \times 1} \times B_{1 \times 4} & & \\
 = C_{4 \times 4} & & \\
 & & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 20 & 15 & 35 \\ 2 & 8 & 6 & 14 \\ -1 & -4 & -3 & -7 \end{bmatrix} \\
 & & 4 \times 4
 \end{array}$$

El producto de un vector columna por un vector fila es una matriz. Multiplicamos elemento a elemento, fila por columna.

3.4.2.3 Vector fila por matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}_{1 \times 4} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 3} = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ((1 \times -2) + (4 \times 1) + (3 \times 2) + (7 \times 5)) = 43 \\ ((1 \times 0) + (4 \times 3) + (3 \times 4) + (7 \times -3)) = 3 \\ ((1 \times 5) + (4 \times 6) + (3 \times 7) + (7 \times 1)) = 57 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

El resultado de multiplicar un vector fila por una matriz es un vector fila.

3.4.2.4 Matriz por vector columna

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \times B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} ((10 \times 1) + (9 \times 2) + (7 \times 3)) = 49 \\ ((4 \times 1) + (8 \times 2) + (2 \times 3)) = 26 \\ ((1 \times 1) + (0 \times 2) + (-4 \times 3)) = 11 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

El resultado de multiplicar una matriz por un vector columna es un vector columna.

3.4.2.5 Matriz por matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad A_{2 \times 3} \times B_{3 \times 3} = C_{2 \times 3} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 34 & 12 \\ 8 & 38 & 30 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$C_{11} = ((1 \times 2) + (0 \times 1) + (5 \times 0)) = 2$$

$$C_{12} = ((1 \times 4) + (0 \times 3) + (5 \times 6)) = 34$$

$$C_{13} = ((1 \times 2) + (0 \times 5) + (5 \times 2)) = 12$$

$$C_{21} = ((2 \times 2) + (4 \times 1) + (3 \times 0)) = 8$$

$$C_{22} = ((2 \times 4) + (4 \times 3) + (3 \times 6)) = 38$$

$$C_{23} = ((2 \times 2) + (4 \times 5) + (3 \times 2)) = 30$$

3.4.3 Propiedades

$$A \times 0 = 0 \text{ Matriz } 0$$

$$A \times I = A \text{ Matriz identidad } (I)$$

$$A \times B \neq B \times A$$

Algunas excepciones donde se da la conmutativa:

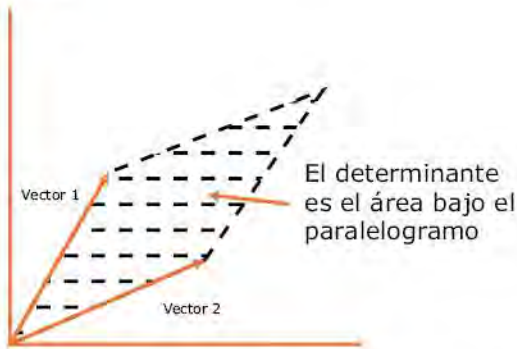
- A^{-1} La inversa A^{-1}
- $A \times I = I \times A$
- $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$
- $A \times A' = A' \times A$
- $(A \times B)' = B' \times A'$
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

3.5 Determinante de una matriz

El determinante es un valor numérico que se obtiene sobre los elementos de una matriz; con notación: $A(a_{ij})_{n \times m}$, el determinante es $|A|$.

Solo está definido para matrices cuadradas; el cálculo nos va a permitir: a) determinar si dicha matriz tiene o no inversa o todas las matrices cuadradas tienen inversa, singularidad o no singularidad, b) establecer el rango de una matriz, c) saber si un sistema de ecuaciones lineales simultaneas SELS tiene o no solución.

Imagen 7



Para una matriz de orden 2×2 $A(a_{ij})$ se calcula:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad |A| = ((a_{11} \times a_{22}) - (a_{21} \times a_{12}))$$

2×2

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad |A| = ((7 \times 2) - (3 \times 1)) = 11$$

$2 \times 2 \qquad |A| = 11$

Si la matriz es de orden mayor 3×3 , entonces se desarrolla por el método de Sarrus o por el método de expansión de cofactores de Laplace.

3.5.1 Sarrus, método de diagonalización

Consiste en repetir las dos primeras columnas de la matriz y trazar diagonales de izquierda a derecha y de derecha a izquierda; finalmente el determinante va a ser igual a la sumatoria del producto de 6 términos; los términos que van de izquierda a derecha se suman y los que van de derecha a izquierda se restan.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}_{3 \times 3}$$

$$|A| = ((1 \times 3 \times 2) + (5 \times 0 \times -1) + (4 \times 2 \times 6) - (-1 \times 3 \times 4) - (6 \times 0 \times 1) - (2 \times 2 \times 5))$$

$$|A| = 6 + 0 + 48 + 12 - 0 - 20$$

$$|A| = 46 \neq 0$$

3.5.2 Método de expansión de cofactores Laplace

Laplace plantea que se debe fijar una fila y sucesivamente ir bloqueando una a una las columnas de la matriz mientras se obtienen matrices de orden 2×2 a las cuales se les calcula el determinante, como se vio anteriormente, y este se multiplica por su posición numérica y signo (únicamente de la fila fijada); es decir, si tenemos la siguiente matriz:

$$\begin{vmatrix} 13 & 24 & 3 \\ 12 & 32 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}_{3 \times 3} \quad (-) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_{3 \times 3} \quad (-) \rightarrow \begin{vmatrix} 13 & -24 & 3 \\ -12 & 32 & -1 \\ 4 & -5 & 8 \end{vmatrix}_{3 \times 3}$$

Si la suma de los subíndices es par, el cofactor toma el signo del menor; si la suma de los subíndices es impar, hay cambio de signo con respecto al signo que tenga el menor. Es decir, en la primera fila y columna (a_{11}) la posición numérica es + 13 (el signo del menor es positivo) y la suma de los subíndices es $a_{11} = 1 + 1 = 2$ (par), por tanto su signo sigue igual.

En la primera fila y segunda columna (a_{12}) la posición numérica es + 24 (el signo del menor es positivo) y la suma de los subíndices es $a_{12} = 1 + 2 = 3$ (impar), por tanto su signo debe cambiar a (-24).

En la primera fila y tercera columna (a_{13}) la posición numérica es + 3 (el signo del menor es positivo) y la suma de los subíndices es $a_{13} = 1 + 3 = 4$ (par), por tanto su signo sigue igual.

**CON LA 1.^a
FILA FIJA**Bloqueando la
1.^a columna

13	(-)24	3
12	32	1
4	5	8

a₁₁

3x3

$$13 \times ((32 \times 8) - (5 \times 1))$$

$$13 \times 251$$

$$= 3263$$

**CON LA 1.^a
FILA FIJA**Bloqueando la
2.^a columna

13	(-) 24	3
12	32	1
4	5	8

a₂₂

3x3

$$-24 \times ((12 \times 8) - (4 \times 1))$$

$$-24 \times 92$$

$$= -2208$$

**CON LA 1.^a
FILA FIJA**Bloqueando la
3.^a columna

13	(-) 24	3
12	32	1
4	5	8

a₃₃

3x3

$$3 \times ((12 \times 5) - (4 \times 32))$$

$$3 \times -68$$

$$= -204$$

$$|A| = 3263 + (-2208) + (-204)$$

$$|851|$$

Si se fija la fila 1 y bloqueamos la columna 1, el determinante nos daría 251, el cual se multiplica por su posición numérica y signo, 13, más el determinante al bloquear la columna 2 por su posición numérica 24 y signo (-), más el determinante al bloquear la columna 3 por su posición numérica y signo, 3; finalmente obtenemos que el determinante de la matriz de orden 3x3 es 851.

De igual manera Laplace plantea que el determinante se puede hallar fijando cualesquiera de las filas de la matriz y el resultado debe ser el mismo $|A| = 851$.

Fijando la segunda fila tendríamos:

CON LA 2.^a FILA FIJA

Bloqueando la 1.^a columna

13	24	3
(-) 12	32	(-) 1
4	5	8

3x3

$$\begin{aligned} & -12 \times ((24 \times 8) \\ & \quad - (5 \times 3)) \\ & = -2124 \end{aligned}$$

CON LA 2.^a FILA FIJA

Bloqueando la 2.^a columna

13	24	3
(-) 12	32	(-) 1
4	5	8

3x3

$$\begin{aligned} & 32 \times ((13 \times 8) \\ & \quad - (4 \times 3)) \\ & = 2944 \end{aligned}$$

CON LA 2.^a FILA FIJA

Bloqueando la 3.^a columna

13	24	3
(-) 12	32	(-) 1
4	5	8

3x3

$$\begin{aligned} & -1 \times ((13 \times 5) \\ & \quad - (4 \times 24)) \\ & = 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &= -2124 + 2944 + 31 \\ &= 851 \end{aligned}$$

Fijando la tercera fila:

CON LA 3.^a FILA FIJA

Bloqueando la 1.^a columna

13	24	3
12	32	1
4	(-) 5	8

3x3

$$\begin{aligned} & 4 \times ((24 \times 1) - (32 \times 3)) \\ & = -288 \end{aligned}$$

CON LA 3.^a FILA FIJA

Bloqueando la 2.^a columna

13	24	3
12	32	1
4	(-) 5	8

3x3

$$\begin{aligned} & -5 \times ((13 \times 1) - (12 \times 3)) \\ & = 115 \end{aligned}$$

CON LA 3.^a FILA FIJA

Bloqueando la 3.^a columna

13	24	3
12	32	1
4	(-) 5	8

3x3

$$\begin{aligned} & 8 \times ((13 \times 32) - (12 \times 24)) \\ & = 1024 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &= -288 + 115 + 1024 \\ &= 851 \end{aligned}$$

3.5.3 Propiedades de los determinantes

- Si dos filas o dos columnas son idénticas, el determinante es cero; de igual manera si una fila o columna es múltiplo de otra, su determinante es cero y de igual manera si los elementos de una fila o columna son cero, su determinante es cero.
- Si una fila o columna se multiplica por un escalar, el determinante será k veces el valor del escalar.
- Si se intercambian todas las filas y las columnas de una matriz (transpuesta), su determinante no cambia $|A| = |A'|$.
- Si se intercambian dos filas y dos columnas de una matriz, cambia el signo del determinante pero no su valor numérico.
- Si a una fila y a una columna se le suma o resta un múltiplo de otra fila o columna.

3.6 Matriz inversa

La inversa es una operación que se realiza o se establece sobre una matriz cuadrada y reemplaza la operación de división en escalares.

La condición necesaria es que la matriz sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$

La condición suficiente es que la matriz sea no singular $|A| \neq 0$

Existen dos métodos para calcular la inversa; el método de Jordán y el método de la adjunta; por simplicidad y familiaridad con los requerimientos abordaremos el método de la adjunta.

3.6.1 Método de la adjunta

Se basa en el método de Laplace o expansión de cofactores trabajado en la sección 3.5.2.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adjunta.}$ **(3.1)** *nótese que si el determinante es cero, no hay inversa.*

Para ello seguimos con el ejemplo anterior donde el determinante es $|851| \neq 0$, por tanto es una matriz no singular y posee inversa:

13	24	3
12	32	1
4	5	8

3x3

CON LA 1.^a FILA FIJA

Bloqueando la 1.^a columna

13	24	3
12	32	1
4	5	8

3x3

CON LA 1.^a FILA FIJA

Bloqueando la 2.^a columna

13	24	3
12	32	1
4	5	8

3x3

CON LA 1.^a FILA FIJA

Bloqueando la 3.^a columna

13	24	3
12	32	1
4	5	8

3x3

32	1
5	8

2x2

12	1
4	8

2x2

12	32
4	5

2x2

Estas tres matrices 2x2 hacen parte de la primera fila de la matriz de cofactores.

CON LA 2.^a FILA FIJA

Bloqueando la 1.^a columna

13	24	3
12	32	1
4	5	8

3x3

CON LA 2.^a FILA FIJA

Bloqueando la 2.^a columna

13	24	3
12	32	1
4	5	8

3x3

CON LA 2.^a FILA FIJA

Bloqueando la 3.^a columna

13	24	3
12	32	1
4	5	8

3x3

24	3
5	8

2x2

13	3
4	8

2x2

13	24
4	5

2x2

Estas tres matrices 2×2 hacen parte de la segunda fila de la matriz de cofactores.

**CON LA 3.^a
FILA FIJA**

Bloqueando la
1.^a columna

13	24	3
12	32	1
4	5	8

3×3

24	3
32	1

2×2

**CON LA 3.^a
FILA FIJA**

Bloqueando la
2.^a columna

13	24	3
12	32	1
4	5	8

3×3

13	3
12	1

2×2

**CON LA 3.^a
FILA FIJA**

Bloqueando la
3.^a columna

13	24	3
12	32	1
4	5	8

3×3

13	24
12	32

2×2

Finalmente, estas tres matrices 2×2 hacen parte de la tercera y última fila de la matriz de cofactores.

La matriz de cofactores es:

32	1	12	1	12	32
5	8	4	8	4	5
24	3	13	3	13	24
5	8	4	8	4	5
24	3	13	3	13	24
32	1	12	1	12	32

(-)

251	92	-68
177	92	-31
-72	-23	128

(-)

3x3

(-)

Esta es la **matriz de cofactores**

251	-92	-68
-177	92	31
-72	23	128

3x3

Se realiza la transpuesta a la matriz de cofactores y se obtiene la adjunta

Adjunta

C=

251	-92	-68
-177	92	31
-72	23	128

3x3

→

251	-177	-72
-92	92	23
-68	31	128

3x3

Recordando la ecuación **(3.1)** $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adjunta}$,

Tenemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{|851|} A^{-1} = \begin{vmatrix} 251 & -177 & -72 \\ -92 & 92 & 23 \\ -68 & 31 & 128 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,294947 & -0,20799 & -0,08461 \\ -0,10811 & 0,108108 & 0,027027 \\ -0,07991 & 0,036428 & 0,150411 \end{vmatrix}$$

3.6.2 Propiedades de la inversa

- La inversa de una matriz cuadrada, si existe, es única.

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

- Una matriz posmultiplicada o premultiplicada por su inversa da como resultado la matriz identidad.

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

- La inversa de una matriz inversa es igual a la matriz original.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- La inversa de una matriz transpuesta es igual a la transpuesta de la matriz inversa.

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

- La inversa del producto de dos matrices es igual al producto de dos inversas.

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

3.6.3 Aplicaciones económicas de la inversa

Las aplicaciones económicas de la matriz inversa son entre otras: a) la matriz insumo producto, b) sistemas de ecuaciones lineales simultáneas SELS, optimización funciones diferenciales y c) estimación de modelos económicos (razón de este capítulo de **ÁLGEBRA** matricial y base del desarrollo del siguiente capítulo).

3.6.3.1 El análisis de la matriz insumo producto

fue planteado por primera vez por Leontief y aplicado a la economía norteamericana; fue un modelo que buscaba poder estimar la producción futura de las diferentes industrias dado un cambio en la demanda final de los productos que producía cada una de ellas.

Estableció los siguientes supuestos:

- Cada una de las industrias o sectores producen un único producto y no hay dos que produzcan el mismo.
- En cada una de las industrias y sectores, el valor total de la producción es igual al valor total de los insumos utilizados.
- Dado que a mediano y largo plazo se dan cambios tecnológicos, los estimativos que se hagan sobre la matriz insumo-producto solo tienen validez a corto plazo. Así mismo, las columnas de la matriz representan la proporción utilizada de insumo por cada una de las industrias y las filas representan la producción de cada una de las industrias.

a_{11} la cantidad de insumo utilizado por la industria 1 pero consumido por la industria 1.

a_{21} la cantidad de insumo utilizado por la industria 1 pero producido por la industria 2.

a_{24} la cantidad de insumo utilizado por la industria 4 pero producido por la industria 2.

3.6.3.2 Sistemas de ecuaciones lineales simultáneas -SELS

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a_{11}X_1 & a_{12}X_2 & a_{13}X_3 & \dots & a_{1n}X_n & = & b_1 \\
 a_{21}X_1 & a_{22}X_2 & a_{23}X_3 & \dots & a_{2n}X_n & = & b_2 \\
 a_{31}X_1 & a_{32}X_2 & a_{33}X_3 & \dots & a_{3n}X_n & = & b_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{m1}X_1 & a_{m2}X_2 & a_{m3}X_3 & \dots & a_{mn}X_n & = & B_m
 \end{array}$$

↓ Coeficientes
 ↓ Incógnitas SELS
 ↓ Términos independientes

Este SELS, para poder encontrar el valor de las incógnitas, debe tomar todo el sistema de ecuaciones lineales:

$$A = (a_{ij}) = \left\{ \begin{array}{cccccc}
 & \text{columnas } n & & & & n = \text{incógnitas SELS} \\
 & & \beta & & & \\
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{filas } m \\ m \times n \\ m = \text{número de ecuaciones del sistema} \end{array}$$

Condiciones para determinar si el SELS tiene o no solución:

- El SELS es consistente si el rango de una matriz de coeficientes es igual al rango de una matriz ampliada, que es la misma matriz con el vector en términos independientes.

$$r(A)^{-1} = r(Ax)$$

Si el rango de la matriz coeficiente es desigual al rango de la matriz ampliada, entonces no tiene solución.

- Si el sistema es consistente, tiene solución; puede ser solución única o solución múltiple.

La solución única es cuando el rango de A es igual al de B e iguala a n , que es el número de incógnitas del sistema.

Un SELS es completo cuando el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

La solución múltiple es cuando el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada pero el valor de ese rango es menor que n o el número de incógnitas.

3.6.4 Métodos de solución

Existen cuatro **métodos de solución**, todos basados en Gauss, Jordán, inversa y Cramer

Gauss	Permiten solucionar sistemas de ecuaciones $n \times m$ de cualquier orden.
Jordán	
Inversa	Solo sirven para sistemas cuadrados
Cramer	

Inversa y Cramer solo son para matrices cuadradas $n \times n$.

Si tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

3.6.4.1 La solución con Cramer

$$\begin{array}{l}
 7x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\
 10x_1 - 2x_2 + x_3 = 8 \\
 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7
 \end{array}
 \quad
 A = \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 7 & -1 & -1 \\
 10 & -2 & 1 \\
 6 & 3 & -2 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \times \\ \\ \times \\ \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 X \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 X_1 \\
 X_2 \\
 X_3
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 Y \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 0 \\
 8 \\
 7
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 3 \times 3 \\ \\ \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 3 \times 1 \\ \\ \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 3 \times 1
 \end{array}$$

La columna Y se reemplaza por cada una de las columnas de la matriz original lo que genera 3 nuevas matrices (A_1 , A_2 y A_3) a las cuales calculamos su debido determinante ($|A_1|$, $|A_2|$ y $|A_3|$) que se divide por el determinante de la matriz original $|A|$ y así obtenemos las incógnitas X_1 , X_2 y X_3 .

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 & A_2 & A_3 \\
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 0 & -1 & -1 \\
 8 & -2 & 1 \\
 7 & 3 & -2 \\
 \hline
 \end{array} &
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 7 & 0 & -1 \\
 10 & 8 & 1 \\
 6 & 7 & -2 \\
 \hline
 \end{array} &
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 7 & -1 & 0 \\
 10 & -2 & 8 \\
 6 & 3 & 7 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \hat{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \\
 \hat{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \\
 \hat{x}_3 = \frac{|A_3|}{|A|}
 \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} 3 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 3 \end{array}$

Se halla el determinante de la matriz original $|A| =$

CON LA 1.^a FILA FIJA

Bloqueando la 1.^a columna

7	(-) -1	-1
10	-2	1
6	3	-2

a_{11}

3×3

$$\begin{aligned}
 & 7 \times ((-2 \times -2) - (3 \times 1)) \\
 & 7 \times 1 \\
 & = 7
 \end{aligned}$$

CON LA 1.^a FILA FIJA

Bloqueando la 2.^a columna

7	(-) -1	-1
10	-2	1
6	3	-2

a_{22}

3×3

$$\begin{aligned}
 & (-) -1 \times ((10 \times -2) - (6 \times 1)) \\
 & 1 \times -26 \\
 & = -26
 \end{aligned}$$

CON LA 1.^a FILA FIJA

Bloqueando la 3.^a columna

7	(-) -1	-1
10	-2	1
6	3	-2

a_{33}

3×3

$$\begin{aligned}
 & -1 \times ((10 \times 3) - (6 \times -2)) \\
 & -1 \times 42 \\
 & = -42
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |A| &= 7 + (-26) + (-42) \\
 &= \mathbf{-61}
 \end{aligned}$$

Se halla el determinante de las nuevas matrices ($|A_1|$, $|A_2|$ y $|A_3|$) = $|A_1|$ =

CON LA 1.^a FILA FIJA

Bloqueando la 1.^a columna

0	(-) -1	-1
8	-2	1
7	3	-2

a_{11}

$$0 \times ((-2 \times -2) - (3 \times 1))$$

$$0 \times 1$$

$$= 0$$

CON LA 1.^a FILA FIJA

Bloqueando la 2.^a columna

0	(-) -1	-1
8	-2	1
7	3	-2

a_{22}

$$(-) -1 \times ((8 \times -2) - (7 \times 1))$$

$$1 \times -23$$

$$= -23$$

CON LA 1.^a FILA FIJA

Bloqueando la 3.^a columna

0	(-) -1	-1
8	-2	1
7	3	-2

a_{33}

$$-1 \times ((8 \times 3) - (7 \times -2))$$

$$-1 \times 42$$

$$= -38$$

$$[A_1] = 0 + (-23) + (-38)$$

$$|-61|$$

$$|A_2| =$$

CON LA 1.^a FILA FIJA

Bloqueando la 1.^a columna

7	(-) 0	-1
10	8	1
6	7	-2

a_{11}

$$7 \times ((8 \times -2) - (7 \times 1))$$

$$7 \times -23$$

$$= -161$$

CON LA 1.^a FILA FIJA

Bloqueando la 2.^a columna

7	(-) 0	-1
10	8	1
6	7	-2

a_{22}

$$(-) 0 \times ((10 \times -2) - (6 \times 1))$$

$$0 \times -26$$

$$= 0$$

CON LA 1.^a FILA FIJA

Bloqueando la 3.^a columna

7	(-) 0	-1
10	8	1
6	7	-2

a_{33}

$$-1 \times ((10 \times 7) - (6 \times -8))$$

$$-1 \times 22$$

$$= -22$$

$$[A_2] = 7 + (0) + (-22)$$

$$|-183|$$

$$|A_3| =$$

**CON LA 1.^a
FILA FIJA**

Bloqueando la
1.^a columna

7	(-) -1	0
10	-2	8
6	3	7

a_{11}

$$7 \times ((-2 \times 7) - (3 \times 8))$$

$$7 \times -38$$

$$= -266$$

**CON LA 1.^a
FILA FIJA**

Bloqueando la
2.^a columna

7	(-) -1	0
10	-2	8
6	3	7

a_{22}

$$(-) -1 \times ((10 \times 7) - (6 \times 8))$$

$$1 \times 22$$

$$= 22$$

**CON LA 1.^a
FILA FIJA**

Bloqueando la
3.^a columna

7	(-) -1	0
10	-2	8
6	3	7

a_{33}

$$0 \times ((10 \times 3) - (6 \times -2))$$

$$0 \times 42$$

$$= 0$$

$$[A_3] = -266 + (22) + (0)$$

$$|-244|$$

Reemplazamos los determinantes hallados y encontramos el valor de nuestras incógnitas $X_1 = 1$, $X_2 = 3$ y $X_3 = 4$

$$\tilde{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-61}{-61} = 1$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-183}{-61} = 3$$

$$\tilde{x}_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-244}{-61} = 4$$

3.6.4.2 La solución con la inversa

$$\begin{array}{l}
 7x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\
 10x_1 - 2x_2 + x_3 = 8 \\
 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7
 \end{array}
 \quad
 A = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}
 \quad
 \begin{matrix} \times \\ \times \\ \times \end{matrix}
 \quad
 \begin{matrix} X \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix}
 = \begin{matrix} Y \\ 0 \\ 8 \\ 7 \end{matrix}$$

$3 \times 3 \qquad \qquad 3 \times 1 \qquad \qquad 3 \times 1$

Como en el ejemplo anterior, recordamos que el determinante es $|-61| \neq 0$, por tanto, es una matriz *no singular* y posee inversa:

Proseguimos con la matriz de cofactores.

**CON LA 1.^a
FILA FIJA**

Bloqueando la
1.^a columna

7	-1	-1
10	-2	1
6	3	-2

3x3

-2	1
3	-2

2x2

**CON LA 1.^a
FILA FIJA**

Bloqueando la
2.^a columna

7	-1	-1
10	-2	1
6	3	-2

3x3

10	1
6	-2

2x2

**CON LA 1.^a
FILA FIJA**

Bloqueando la
3.^a columna

7	-1	-1
10	-2	1
6	3	-2

3x3

10	-2
6	3

2x2

Estas tres matrices 2x2 hacen parte de la primera fila de la matriz de cofactores.

**CON LA 2.^a
FILA FIJA**

Bloqueando la
1.^a columna

7	-1	-1
10	-2	1
6	3	-2

3x3

-1	-1
3	-2

2x2

**CON LA 2.^a
FILA FIJA**

Bloqueando la
2.^a columna

7	-1	-1
10	-2	1
6	3	-2

3x3

7	-1
6	-2

2x2

**CON LA 2.^a
FILA FIJA**

Bloqueando la
3.^a columna

7	-1	-1
10	-2	1
6	3	-2

3x3

7	-1
6	3

2x2

Estas tres matrices 2x2 hacen parte de la segunda fila de la matriz de cofactores.

**CON LA 3.^a
FILA FIJA**

 Bloqueando la
1.^a columna

7	-1	-1
10	-2	1
6	3	-2

3x3

-1	-1
-2	1

2x2

**CON LA 3.^a
FILA FIJA**

 Bloqueando la
2.^a columna

7	-1	-1
10	-2	1
6	3	-2

3x3

7	-1
10	1

2x2

**CON LA 3.^a
FILA FIJA**

 Bloqueando la
3.^a columna

7	-1	-1
10	-2	1
6	3	-2

3x3

7	-1
10	-2

2x2

Finalmente, estas tres matrices 2x2 hacen parte de la tercera y última fila de la matriz de cofactores.

La matriz de cofactores es:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} (-) \\ \left| \begin{array}{cc|cc|cc} -2 & 1 & 10 & 1 & 10 & -2 \\ 3 & -2 & 6 & -2 & 6 & 3 \end{array} \right| \end{array} \quad (-) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -26 & 42 \\ \hline 5 & -8 & 27 \\ \hline -3 & 17 & -4 \\ \hline \end{array} \\ (-) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Esta es la} \\ \text{matriz de} \\ \text{cofactores} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 26 & 42 \\ \hline -5 & -8 & -27 \\ \hline -3 & -17 & -4 \\ \hline \end{array} \\ (-) \end{array} \\
 \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc|cc|cc} -1 & -1 & 7 & -1 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 6 & -2 & 6 & 3 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc|cc|cc} -1 & -1 & 7 & -1 & 7 & -1 \\ -2 & 1 & 10 & 1 & 10 & -2 \end{array} \right| \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \text{Se realiza la transpuesta a} \\ \text{la matriz de cofactores y se} \\ \text{obtiene la adjunta.} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{Adjunta} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -5 & -3 \\ \hline 26 & -8 & -17 \\ \hline 42 & -27 & -4 \\ \hline \end{array} \end{array} \\
 C = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -26 & 42 \\ \hline 5 & -8 & 27 \\ \hline -3 & 17 & -4 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 26 & 42 \\ \hline -5 & -8 & -27 \\ \hline -3 & -17 & -4 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Recordando la ecuación (3.1) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adjunta.}$

Tenemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{|-61|} \begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 26 & -8 & -17 \\ 42 & -27 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,01639 & 0,081967 & 0,04918 \\ -0,42623 & 0,131148 & 0,278689 \\ -0,68852 & 0,442623 & 0,065574 \end{vmatrix}$$

$$(A)^{-1} X(Y) = x_n$$

$$\begin{matrix} & A^{-1} & & X & Y & = & & X \\ \begin{pmatrix} -0,01639 & 0,081967 & 0,04918 \\ -0,42623 & 0,131148 & 0,278689 \\ -0,68852 & 0,442623 & 0,065574 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ x \\ 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ 3 \times 3 & & 1 \times 3 & & & & 1 \times 3 \end{matrix}$$

Taller

1. Defina si la matriz es o no singular.

a.	b.	c.
$\begin{vmatrix} 2 & 32 & 4 \\ 4 & 32 & 8 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 13 & 2 & -6 \\ -3 & 5 & 8 \\ 23 & 10 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 23 & 10 & 6 \\ 3 & 32 & 8 \\ 46 & 20 & 12 \end{vmatrix}$

2. Halle el determinante de las siguientes matrices:

a.	b.	c.	d.
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 9 \\ 3 & -9 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 87 & 37 & 648 \\ 92 & 43 & 732 \\ 11 & -55 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -23 & -15 & -10 \\ -4 & -72 & -31 \\ -7 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

3. Plantee la matriz de cofactores y la respectiva solución.

a.	b.
$\begin{vmatrix} 3 & -15 & 11 \\ 4 & -36 & 9 \\ 8 & -1 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 9 & -6 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & -15 & 7 \end{vmatrix}$

4. Halle la matriz inversa.

a.

$$\begin{vmatrix} 23 & -2 & 8 \\ 235 & 47 & 98 \\ 16 & 24 & -30 \end{vmatrix}$$

b.

$$\begin{vmatrix} 7 & 34 & 56 \\ 64 & 12 & 9 \\ 82 & -4 & 24 \end{vmatrix}$$

c.

$$\begin{vmatrix} 62 & 34 & -72 \\ 4 & -3 & -5 \\ -17 & 9 & 63 \end{vmatrix}$$

d.

$$\begin{vmatrix} -96 & -267 & -16 \\ -107 & 2 & -12 \\ -32 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

e.

$$\begin{vmatrix} 29 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \\ 14 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

5. Solucione los siguientes SELS:

a. $3x_1 + 5x_2 = 6$

$$12x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 2$$

$$21x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 21$$

b. $2x_1 + 14x_2 + 8x_3 = 3$

$$-6x_1 - 2x_2 = 54$$

$$37x_1 + 24x_2 + 17x_3 = 9$$

c. $21x_2 + 93x_3 = 1$

$$x_1 + 33x_2 + 67x_3 = 10$$

$$78x_1 + 45x_2 + 84x_3 = 2$$

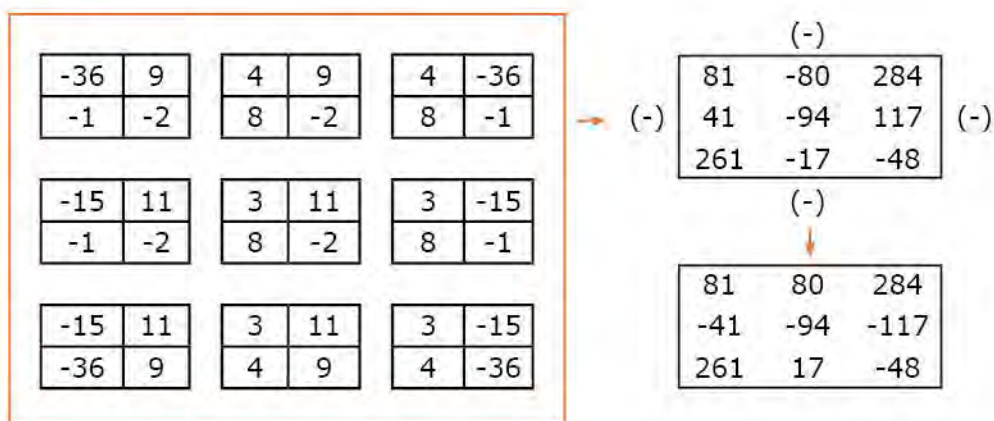
Solución

1. $a = 0$, $b = 482$ y $c = 0$

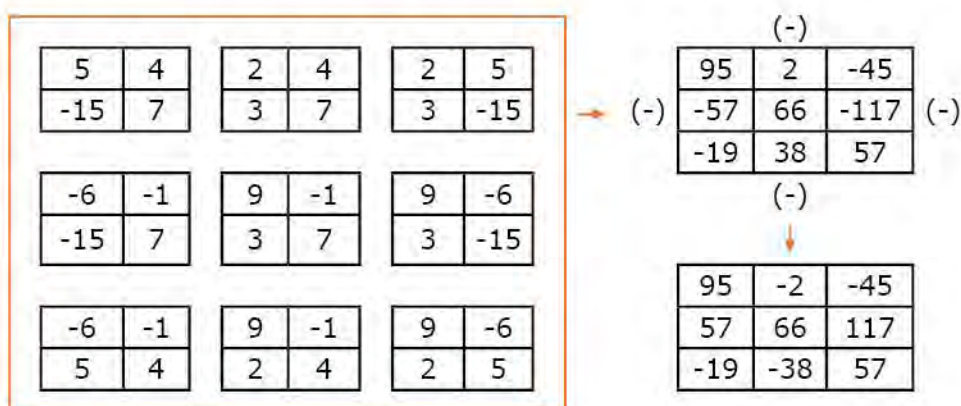
2. $a = 95$, $b = 215.160$, $c = -4$ y $d = -734$

3. a y b

a.



b.



4.

a.

$$\begin{vmatrix} 0,0582 & -0,0020 & 0,0088 \\ -0,1333 & 0,0127 & 0,0058 \\ -0,0756 & 0,0090 & -0,0240 \end{vmatrix}$$

b.

$$\begin{vmatrix} -0,0034 & 0,0110 & 0,0039 \\ 0,0085 & 0,0469 & -0,0373 \\ 0,0131 & -0,0299 & 0,0222 \end{vmatrix}$$

c.

$$\begin{vmatrix} 0,0106 & 0,2063 & 0,0285 \\ 0,0123 & -0,1983 & -0,0016 \\ 0,0011 & 0,0840 & 0,0238 \end{vmatrix}$$

d.

$$\begin{vmatrix} -0,0001 & 0,0002 & -0,0314 \\ -0,0037 & 0,0050 & -0,0054 \\ 0,0004 & -0,0839 & 0,2793 \end{vmatrix}$$

e.

$$\begin{vmatrix} 0,0302 & -0,0034 & 0,0089 \\ -0,1408 & 0,0156 & 0,2916 \\ 0,1251 & 0,0972 & -0,2592 \end{vmatrix}$$

5.

a. $X_1 = 0,6911$, $X_2 = 0,7854$, $X_3 = -0,5902$

b. $X_1 = -3,0525$, $X_2 = -17,8425$, $X_3 = 32,3625$

c. $X_1 = -0,1623$, $X_2 = 0,5283$, $X_3 = -0,1085$

CAPÍTULO 4

ESTIMACIÓN DE MODELOS ECONÓMICOS

Nuestra primera tarea consiste en estimar la función de regresión poblacional (FRP) con base en la función de regresión muestral (FRM) de la forma más precisa posible. Para ello existen varios modos de calcular la FRM, pero el más utilizado es el *método de mínimos cuadrados ordinarios* MCO (en lo que respecta al análisis de regresión); así mismo, se recuerda que el método de MCO nos permitirá analizar únicamente modelos lineales uniecuacionales y es preciso para el objetivo del presente texto.

4.1 Estimación de parámetros por MCO

El método de MCO se atribuye a Carl Friedrich Gauss, matemático alemán. Bajo ciertos supuestos que se estudiarán, tiene propiedades estadísticas muy atractivas:

Recordando la FRP $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + u_i$ (5) no podemos observarla directamente; esta función debe de ser estimada a partir de la FRM

Es decir que a todos los residuos se les da el mismo peso sin importar que tan lejos o cerca se encuentren las observaciones de la FRM. Pudiera presentarse que la suma total de residuos sea cero¹¹ a pesar de que las \hat{u}_i se encuentran dispersas alrededor de la FRM.

Por tanto, podemos evitar este problema si utilizamos el método de MCO, que establece que la FRM puede determinarse en forma tal que sea lo más pequeña posible, donde \hat{u}_i^2 son los residuos elevados al cuadrado. De este modo, a los residuales más lejanos se les da más peso y la situación que se presenta en el ejemplo anterior con u_1 y u_6 , en los que en la minimización de la $\sum \hat{u}_i^2$ los \hat{u}_i , sin importar su grado de dispersión la suma es pequeña, en el proceso de MCO no podría presentarse; es más, a mayor \hat{u}_i , mayor será la $\sum \hat{u}_i^2$.

Se parte de un modelo:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki} + \hat{u}_i$$

Y en forma matricial:

$$Y = X\hat{\beta} + \hat{u}$$

Es decir:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{array} & = & \begin{array}{c} 1 \quad X_{12} \quad X_{13} \quad \dots \quad X_{k1} \\ 1 \quad X_{22} \quad X_{23} \quad \dots \quad X_{k2} \\ 1 \quad X_{32} \quad X_{33} \quad \dots \quad X_{k3} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 1 \quad X_{2n} \quad X_{3n} \quad \dots \quad X_{kn} \end{array} & \times & \begin{array}{c} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{array} & + & \begin{array}{c} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_1 \\ \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_1 \end{array} \\ \text{Yn} \times 1 & & & \text{n} \times \text{k} & & \text{K} \times \text{n} & & \text{n} \times 1 \end{array}$$

¹¹ Si asumiéramos que $\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 + \hat{u}_4 + \hat{u}_5 + \hat{u}_6$ tienen los valores de 8, -3, +2, -2, +3 y -8, respectivamente, la suma de estos residuos sería cero a pesar de que se encuentran dos residuos con mayor grado de dispersión alrededor de la FRM.

lo que se busca es reducir los errores

$$\text{Minimizar } \sum \hat{u}^2 = \text{Minimizar } (\hat{u}'\hat{u})$$

$$\hat{u}'\hat{u} = [\hat{u}_1 \ \hat{u}_2 \ \hat{u}_3 \ \dots \ \hat{u}_n] * \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} = \hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + \hat{u}_3^2 + \dots + \hat{u}_n^2 = \sum \hat{u}^2$$

$$Y \text{ partimos de que } Y = X\hat{\beta} + \hat{u}$$

$$\text{si despejamos } \hat{u} \rightarrow \hat{u} = Y - X\hat{\beta}$$

$$\text{Al Minimizar } \sum \hat{u}^2 = \min (\hat{u}'\hat{u}) = \min [Y - X\hat{\beta}]' [Y - X\hat{\beta}]$$

$$\text{recordando la propiedad } (A + B)' = A' + B'$$

tenemos,

$$\min [Y - X\hat{\beta}]' [Y - X\hat{\beta}] = \min [Y' - \hat{\beta}'X'] [Y - X\hat{\beta}]$$

desarrollamos el producto multiplicando término a término

$$\min [Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}]$$

$$\text{como } Y'X\hat{\beta} = [\text{escalar}] = \hat{\beta}'X'Y$$

$$\Rightarrow \min [Y'Y - 2Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}]$$

Para minimizar derivamos respecto a los betas

$$\frac{\partial (Y'Y - 2Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta}$$

$$\text{donde } \frac{\partial a'\hat{\beta}}{\partial \hat{\beta}} = a \quad \text{y} \quad a \text{ es } X'Y \quad \frac{\partial \hat{\beta}'a\hat{\beta}}{\partial \hat{\beta}} = 2a\hat{\beta}$$

$$\Rightarrow X'Y = X'X\hat{\beta}$$

Despejamos $\hat{\beta}$

Para ello, recordamos que no existe la división matricial,

por tanto, multiplicamos por la inversa a ambos lados para reducir términos,

$$(X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'X\hat{\beta} \quad \text{donde, } (X'X)^{-1}X'X = I$$

$$(X'X)^{-1}X'Y = I\hat{\beta} \quad \text{donde, } I\hat{\beta} = \hat{\beta}$$

$$\rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (4.3)$$

4.2 Propiedades de los estimadores de los parámetros

- Son lineales $\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$
 $\hat{\beta}_{k \times 1} = A_{k \times n} Y_{n \times 1}$
- Son insesgados $E(\hat{\beta}) = \beta$
- Tienen varianza mínima $Cov(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$ (4.4)

Recordando la ecuación (4.3)

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Si sustituimos Y

$$Y = X\beta + u \quad (4)$$

tenemos

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'(X\beta + u)$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u$$

$$\text{recordando } (X'X)^{-1}X'X = I$$

$$\hat{\beta} = I\beta + (X'X)^{-1}X'u \quad \text{donde } I\beta = \beta$$

$$\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'u$$

Por la propiedad de insesgamiento:

$$\begin{aligned}
&= E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] \\
&= E[(X'X)^{-1}X'u)((X'X)^{-1}X'u)'] \\
&= E[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}] \quad \text{bajo el supuesto } E(uu') = \sigma_u^2 I \\
&= (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1} \\
&= (X'X)^{-1}X'(\sigma_u^2 I)X(X'X)^{-1} \\
&= (X'X)^{-1}(X'X)\sigma_u^2(X'X)^{-1} \\
&= I\sigma_u^2(X'X)^{-1} \\
\text{Cov}(\hat{\beta}) &= \sigma_u^2(X'X)^{-1} \quad (4.4)
\end{aligned}$$

donde la σ_u^2 se halla:

$$\sigma_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k} = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-k} = \frac{y'y - \hat{\beta}'x'y}{n-k} \quad (4.5)$$

4.3 Coeficiente de determinación

- Mide en qué porcentaje las variables exógenas explican la variación de la endógena.
- Descomposición de la varianza

$$\sum_1^n y_i^2 = \sum_1^n \hat{y}_i^2 + \sum_1^n \hat{\mu}_i^2 \quad (4.6)$$

- $STC = SEC + SRC$

$$\sum_1^n y_i^2 = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \text{SUMA TOTAL DE CUADRADOS} \quad (4.7)$$

$$\sum_1^n \hat{y}_i^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \text{SUMA EXPLICADA DE CUADRADOS} \quad (4.8)$$

$$\sum_1^n \hat{\mu}_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \text{SUMA DE RESIDUALES AL CUADRADO} \quad (4.9)$$

4.3.1 Si el modelo tiene término independiente el R^2 se calcula:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad 0 < R^2 < 1 \quad (4.10)$$

en cualquier caso

$$1 = R^2 + \frac{SRC}{STC} \Rightarrow R^2 = 1 - \frac{SRC}{STC} = 1 - \frac{\sum \hat{\mu}_i^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (4.11)$$

En su expresión matricial:

$$STC = \sum_i^n y_i^2 = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - 2\bar{Y} \sum Y_i + n\bar{Y}^2 = Y'Y - n\bar{Y}^2 \quad (4.12)$$

$$SEC = \hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2 \quad (4.13)$$

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2}{Y'Y - n\bar{Y}^2} \quad (4.14)$$

4.3.2 Coeficiente de determinación ajustado

$$\tilde{R}^2 = 1 - \frac{\frac{SRC}{STC}}{\frac{n-k}{n-1}} = 1 - \frac{n-1}{n-k} (1 - R^2) \quad (4.15)$$

4.4 Coeficiente de correlación simple y parcial

4.4.1 Coeficiente de correlación simple: mide el grado de asociación lineal entre X y Y

$$r_{xy} = \sqrt{R^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}} \quad -1 < r_{xy} < 1 \quad (4.16)$$

4.4.2 Coeficiente de correlación parcial

$$r_{j|x_2, x_3, x_4, \dots, x_k} = \frac{\sum u_1 u_2}{\sqrt{\sum u_1^2 \sum u_2^2}} \quad (4.17)$$

4.5 Estimación por intervalos

$$P \left[\hat{\beta}_i - t_{\frac{\alpha}{2}} ee(\hat{\beta}_i) \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + t_{\frac{\alpha}{2}} ee(\hat{\beta}_i) \right] = 1 - \alpha \quad (4.18)$$

4.6 Contrastes de significancia estadística de parámetros

Tipo de hipótesis	H_0	H_I	Decisión	Gráficos
Dos colas	$\beta_i = \beta_{i^0}$	$\beta_i \neq \beta_{i^0}$	$ t > t_{\alpha/2}$	1
Cola izquierda	$\beta_i \geq \beta_{i^0}$	$\beta_i < \beta_{i^0}$	$t < -t_{\alpha}$	2
Cola derecha	$\beta_i \leq \beta_{i^0}$	$\beta_i > \beta_{i^0}$	$t > t_{\alpha}$	3

Imagen 9



4.7 Contrastes de significancia

- Se tiene el modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \beta_5 x_{i5} + u_i$$

4.7.1 Contraste de significancia individual

$$\begin{aligned} H_0 &= \beta_i = 0 \\ H_i &= \beta_i \neq 0 \end{aligned} \quad t_{n-k} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{ee(\hat{\beta}_i)} \quad (4.19)$$

4.7.2 Contraste de significancia global

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \dots \beta_k = 0 \quad F = \frac{SEC/(k-1)}{SRC/(n-k)} \rightarrow F(k-1, n-k) \quad (4.20)$$

4.7.3 Contraste de significancia para un subconjunto de parámetros

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_2 = \beta_3 = 0 & Y_i &= \beta_1 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 \rightarrow SCR^* \\ H_i &: \text{al menos un } \beta_i \neq 0 \quad i = 2, 3 \end{aligned}$$

4.7.4 Modelo restringido

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } \frac{(SRC^* - SRC) / (k_1)}{SRC / (n - k)} > f(k_1, n - k, \alpha) \quad (4.21)$$

Donde k_1 es el número de parámetros de H_0

4.8 Test de hipótesis para un conjunto de restricciones lineales

Se definen las matrices R de tamaño $j \times k$ donde j es el número de restricciones lineales y un vector r de tamaño $(j \times 1)$. R contiene los coeficientes de cada una de las restricciones lineales y r los valores a los que son iguales estas restricciones.

$$\begin{aligned} H_{0i} &: R\beta = r \\ H_i &: R\beta \neq r \end{aligned} \quad F = \frac{(R\hat{\beta} - r)' [R(X'X)^{-1}R']^{-1} (R\hat{\beta} - r)}{J\sigma_v^2} \rightarrow F(J, n - k)$$

4.9 Predicción

Después de la estimación de los parámetros y de hacer análisis estructural, el uso más habitual de la regresión consiste en la predicción.

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2,t+1} + \hat{\beta}_3 X_{3,t+1} + \dots + \hat{\beta}_k X_{k,t+1}$$

$$\hat{Y}_{t+1} = X_{t+1} \hat{\beta} \quad \text{predicción puntual}$$

$$\text{donde } X_{t+1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & X_{2,t+1} & X_{3,t+1} & \dots & X_{k,t+1} \end{bmatrix}$$

predicción por intervalo

$$\text{var}(Y_{t+1} - \hat{Y}_{t+1}) = \text{Var}(e_{t+1}) = \hat{\sigma}^2 (1 + X_{t+1} (X'X)^{-1} X'_{t+1})$$

$$\hat{Y}_{t+1} \pm t_{\alpha/2} DS(e_{t+1})$$

4.10 Contraste de hipótesis estructurales del modelo

- Muestras pequeñas
- Cambio estructural
- Especificación errónea
- Multicolinealidad

4.10.1 Muestras pequeñas

Para que el modelo tenga solución se exige que el número de datos (observaciones) sea superior al número de parámetros del modelo ($n > k$).

Para efectos operativos se necesita un mínimo de alrededor de 15 datos para tener alguna garantía en la estimación de 3 o 4 parámetros.

4.10.2 Cambio estructural

Una de las hipótesis estructurales del modelo es la constancia de los parámetros del modelo de regresión durante todo el periodo de observación y que se mantiene para el horizonte de predicción. Cuando esta condición no se cumple se dice que el modelo sufre de cambio estructural.

4.10.2.1 Cómo detectar el cambio estructural

Para detectarlo se aplica el test de Chow (pasos)

1. Estimar $Y = X\hat{\beta} + \hat{\mu}$ y obtener SRC
2. Estimar $Y^* = X^*\hat{\beta}^* + \hat{\mu}^*$ y obtener SRC*
3. Estimar $Y^{**} = X^{**}\hat{\beta}^{**} + \hat{\mu}^{**}$ y obtener SRC**
4. Obtener F calculado
$$F = \frac{(SRC - (SRC^* + SRC^{**})) / k}{(SRC^* + SRC^{**}) / (n - 2k)} \quad (4.21)$$
5. Hacer el Contraste F calculado contra F Tabulado con K y n-2k gl bajo la hipótesis

Ho: B=B*=B**(no hay cambio estructural)

4.10.2.2 Para solucionar el cambio estructural

- Aplicar regresiones cambiantes a cada submuestra
- Readaptar el modelo básico de regresión
- Incluir una variable ficticia en la regresión

$$Y_t = \mu + \alpha D_t + X_t^* \hat{\beta} + U_t \quad \text{afecta intercepto}$$

$$Y_t = \mu + X_t^* \hat{\beta} + \alpha D_t X_t^* + U_t \quad \text{afecta pendientes}$$

4.10.3 Especificación errónea

Cuando se plantea un modelo se supone especificación correcta, pero esto es difícil de cumplir bien porque:

- La forma funcional no es la correcta
- Por omisión de variables relevantes
- Por incluir variables no relevantes

4.10.4 Multicolinealidad -MC

4.10.4.1 MC exacta

Es cuando existe una relación exacta entre variables exógenas. En este caso el determinante de $X'X$ es igual a cero, no se puede hallar la inversa $(X'X)^{-1}$ y por tanto no se pueden estimar los parámetros (β).

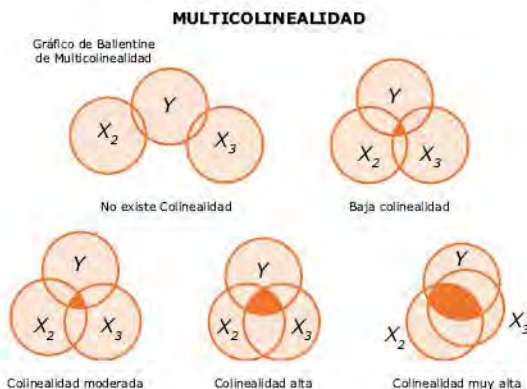
Recordando $\frac{1}{|A|} x^o \text{ adjunta} = (X'X)^{-1}$, pero si el $|A| = 0$.

$\frac{1}{|0|} x^o \text{ adjunta} = (0) \rightarrow \text{no hay inversa,}$

4.10.4.2 MC aproximada

Es cuando existe una relación aproximada entre variables exógenas. En este caso el determinante de $X'X$ es cercano a cero; esto hace que los estimadores se distorsionen.

Imagen 10



4.10.4.3 Cómo detectar la multicolinealidad

- A partir de las consecuencias
- Calcular los coeficientes de correlación simple- r_{xy} entre variables exógenas y destacar aquellos casos en que $r_{xy} > 0.9$
- Hacer regresiones auxiliares entre las variables exógenas del modelo y destacar aquellos casos en los cuales el R^2 de la regresión auxiliar es mayor al R^2 del modelo original.

4.10.4.4 Tratamiento de variables ficticias o variables dummy

- Las variables *dummy* son aquellas que reciben los valores 1 y 0; se utilizan cuando en los modelos existen variables que no son directamente cuantificables y que son importantes para explicar la variable endógena.

Ejemplo:

1. El estrato socioeconómico
2. La época del año

Ejemplo:

$$\text{Salario} = \beta_1 + \beta_2 \text{Exp} + \beta_3 D_1 + \beta_4 D_2 + \beta_5 D_3 + \beta_6 D_4 + u$$

Se debe tener cuidado al incluir las dummy porque se puede caer en la trampa de las variables ficticias; multicolinealidad $m, m-1$,

1	7	1	0	0	0
1	10	0	0	1	0
1	25	0	1	0	0
1	20	0	0	0	1
1	18	1	0	0	0
1	16	0	0	1	0
1	10	0	1	0	0

Si se tiene m – categorías
la suma de las Dummies
es igual a la columna
del intercepto.
por tanto, se debe
eliminar una categoría.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Por ejemplo,} \\ \text{educacion} \\ \text{la Dummy} \\ \text{de primaria.} \end{array} \right\}$

Al eliminar la dummy de primaria D_1 , todo se referencia a primaria

$$\text{Salario} = 500 + 52\text{Exp} + 12D_2 + 20D_3 + 50D_4 + u$$

$D_2 \rightarrow$ El individuo de secundaria gana \$ 12.000 más que el de primaria.

4.11 Contraste de hipótesis sobre la perturbación aleatoria

Heterocedasticidad y autocorrelación

4.11.1 Heterocedasticidad

La varianza de los errores no es constante a lo largo de la muestra

$$\text{VAR}(U_i | X) = \sigma_{\mu_i}^2 \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{E}(UU' | X) = \sigma_{\mu}^2 \Omega_n \end{array} \right.$$

4.11.1.1 Cómo detectar la heteroscedasticidad

- Gráfico
- Prueba de Park
- Prueba de Glejser
- Prueba de Goldfeld y Quandt
- Prueba de White
- Prueba de correlación por rangos de Spearman

4.11.1.2 Posibles soluciones de la heteroscedasticidad

- Aplicar mínimos cuadrados generalizados -MCG

$$\hat{\beta}_{MCG} = (X\Omega^{-1}X)^{-1}X\Omega^{-1}Y$$

- Transformar el modelo por la matriz P y aplicar MCO

$$Y^* = PY$$

$$X^* = PX \quad \text{el nuevo modelo será } Y^* = X^*B + U^*$$

Donde la matriz P lleva en la diagonal los elementos de la variable con la cual es proporcional la heterocedasticidad y el resto son cero.

4.11.2 Autocorrelación

Existe relación entre los errores de un periodo con los de otro.

$$COV(U_i U_{i-i}) \neq 0 \quad \text{para } i \neq 0 \quad E(UU' | X) = \sigma_u^2 \Omega_n$$

4.11.2.1 Cómo detectar la autocorrelación

- Gráfico
- Durbin Watson
- h de Durbin
- Box Pierce
- Ljung Box
- Test de Wallis
- Prueba de rachas
- Chi cuadrado de independencia

4.11.2.2 Método de Durbin Watson

Se utiliza para detectar AR(1)

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{U}_t - \hat{U}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{U}_t^2} \quad (4.22)$$

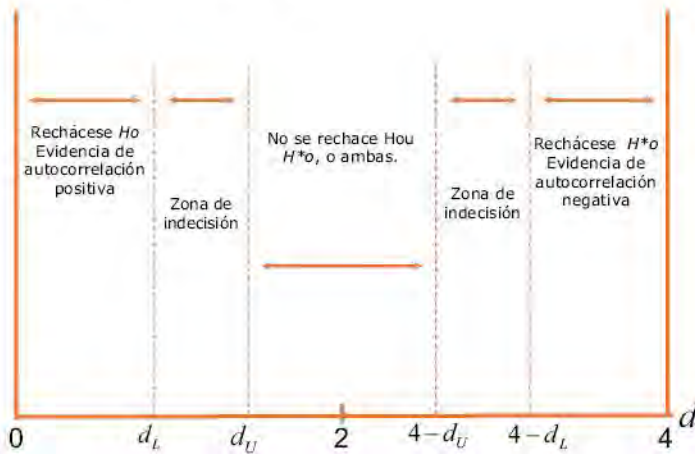
Definida como la razón de la suma de las diferencias al cuadrado de residuales sucesivos sobre la SRC.

Supuestos en los cuales se basa:

- El modelo de regresión incluye intercepto
- Las variables explicativas X , son fijas en muestreos repetidos
- Los errores se generan mediante un proceso AR(1) es decir que $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$
- El modelo no incluye valores rezagados de la variable dependiente
- Dada la definición, es posible llegar a demostrar que $d \approx 2(1 - \hat{\rho})$ pero como:
 $-1 < \rho < 1$, entonces $0 < d < 4$.

Reglas de decisión:

- Si $0 < d < d_l$ AR (1) positiva
- Si $d_u < d < 4 - d_u$ no AR(1)
- Si $4 - d_l < d < 4$ AR(1) negativa
- Si $d_l < d < d_u$ o $4 - d_u < d < 4 - d_l$ no se puede concluir.

Imagen 11. Durbin Watson

Sin embargo, la prueba d tiene como desventaja que cuando cae en la zona de indecisión o región de ignorancia no se puede concluir la existencia de autocorrelación.

4.11.2.3 Posibles soluciones para la autocorrelación

- Ensayar nuevas variables explicativas o reconsiderar la forma funcional del modelo.
- Aplicar MCG o transformar el modelo utilizando la matriz P . Tanto Ω como P son matrices que dependen de ρ .

4.11.3 No normalidad

- El supuesto es que los residuos se distribuyen normalmente.
- Cuando no se cumple esta condición, las pruebas de inferencia estadística pierden confiabilidad.
- Las principales pruebas para detectarla son la de Jarque Bera y Shapiro Wilk.
- Posibles soluciones: aplicar logaritmo a todas las variables.

Taller¹²

1. La siguiente información es una muestra de 7 industrias de refrescos, donde K es el número de máquinas utilizadas en el proceso, L es el número de trabajadores y Q el número de unidades producidas (todo expresado en logaritmos).

	K	L	Q
	2,08	3,14	4,66
	2,2	2,64	4,4
	1,39	3,64	4,29
	0,69	4,57	4,05
	1,79	2,4	4,2
	1,79	3,76	4,59
	1,1	4,53	4,41
Sumas	11,04	24,68	30,6
promedios	1,57714286	3,52571429	4,37142857

$(XX)^{-1}$		
27,1065029	-6,9220181	-4,55131445
-6,9220181	1,98670246	1,07459204
-4,55131445	1,07459204	0,81019874

- Interprete B_2 y B_3 .
- Calcule R^2 y R^2 ajustado e interprete.
- Establezca intervalos de confianza y pruebas de significancia para B_2 y B_3 e interprete.
- Realice la prueba de significancia global e interprete.
- Pruebe la hipótesis de que estas industrias poseen una función de producción Cobb Douglas con rendimientos constantes a escala.

¹² Para ver la solución de este ejercicio en Excel, véase el Apéndice 4.

Solución

$$Y_i = \beta_1 X_2^{\beta_2} X_3^{\beta_3} \quad \ln Y_i = \beta_0 + \beta_2 \ln X_2 + \beta_3 \ln X_3 \quad \text{donde } \beta_0 = \ln \beta_1$$

Recordando la ecuación **(4.3)** para estimar los betas $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ y que ya poseemos la matriz inversa $(X'X)^{-1}$ tendríamos:

$$X =$$

La matriz X está compuesta por el intercepto; la columna de unos y por k y l , el número de máquinas utilizadas en el proceso y por el número de trabajadores requeridos respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2,08 & 3,14 \\ 1 & 2,2 & 2,64 \\ 1 & 1,39 & 3,64 \\ 1 & 0,69 & 4,57 \\ 1 & 1,79 & 2,4 \\ 1 & 1,79 & 3,76 \\ 1 & 1,1 & 4,53 \end{bmatrix} = X$$

Por tanto se halla la $X' =$ por las propiedades de la transpuesta (donde las filas se transforman en columnas)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2,08 & 2,2 & 1,39 & 0,69 & 1,79 & 1,79 & 1,1 \\ 3,14 & 2,6 & 3,64 & 4,57 & 2,4 & 3,76 & 4,53 \end{bmatrix} \quad 3 \times 7$$

$X'Y = X'$ multiplicada por Y (el número de unidades producidas)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2,08 & 2,2 & 1,39 & 0,69 & 1,79 & 1,79 & 1,1 \\ 3,14 & 2,6 & 3,64 & 4,57 & 2,4 & 3,76 & 4,53 \end{bmatrix} \quad 3 \times 7 \quad X \quad \begin{bmatrix} 4,66 \\ 4,4 \\ 4,29 \\ 4,05 \\ 4,2 \\ 4,59 \\ 4,41 \end{bmatrix} \quad 7 \times 1 = \begin{bmatrix} 30,6 \\ 48,7155 \\ 107,6882 \end{bmatrix} \quad 3 \times 1$$

Recordemos que la multiplicación se realiza término a término, fila por columna.

$(1 \times 4,66) + (1 \times 4,4) + (1 \times 4,29) + (1 \times 4,05) + (1 \times 4,2) + (1 \times 4,59) + (1 \times 4,41) = 30,6$ y así sucesivamente

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\begin{array}{ccc}
 (X'X)^{-1} & & X'Y \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 27,1065029 & -6,9220181 & -4,55131445 \\ \hline -6,9220181 & 1,98670246 & 1,07459204 \\ \hline -4,55131445 & 1,07459204 & 0,81019874 \\ \hline \end{array} & \times & \begin{array}{|c|} \hline 30,6 \\ \hline 48,7155 \\ \hline 107,6882 \\ \hline \end{array} \\
 3 \times 3 & & 3 \times 1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline \hat{\beta} \\ \hline 2,1266 \\ \hline 0,6903 \\ \hline 0,3279 \\ \hline \end{array}
 \quad 3 \times 1$$

a. Interpretación de la regresión

$$\hat{Y} = 2,1266 + 0,6903X_1 + 0,3279X_2$$

B_2 : según los resultados del coeficiente de elasticidad del capital de 0,6903, por cada incremento del 1% de maquinaria utilizada en el proceso, el producto (medido en unidades de refrescos producidos) se eleva en promedio cerca del 0,69%, manteniendo el número de trabajadores constante.

B_3 : nos indica que con un incremento del 1% en el número de trabajadores (teniendo en cuenta los resultados del coeficiente de elasticidad de trabajo de 0,3279), el número de unidades producidas se eleva en promedio cerca del 0,33%, manteniendo constantes el número de máquinas utilizadas en el proceso.

b. Recordando la ecuación **(4.10)** y así mismo la ecuación **(4.15)**

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} \quad \tilde{R}^2 = 1 - \frac{\frac{SRC}{n-1}}{\frac{STC}{n-1}} = 1 - \frac{n-1}{n-k} (1 - R^2)$$

Para hallar el R^2 y el R^2 ajustado debemos hallar la STC, la SEC y la SRC, ecuaciones 4,12, 4,13 y 4,23 respectivamente:

$$SEC = \hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2 \quad \textbf{(4.13)}$$

$$\hat{\beta} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2,1266 \quad 0,6903 \quad 0,3279 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \times 3 \\ \times \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 30,6 \\ 48,7155 \\ 107,6882 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \times 1 \\ \times \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 134,01323 - (7 \times 19,1094) = \\ (134,0132 - 133,7658) \quad 0,247514 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{SEC} \end{array}$$

Transponemos los betas

$$STC = Y'Y - n\bar{Y}^2 \quad (4.12)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline Y'Y \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4,66 \quad 4,4 \quad 4,29 \quad 4,05 \quad 4,2 \quad 4,59 \quad 4,41 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \times 7 \\ \times \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4,66 \\ 4,4 \\ 4,29 \\ 4,05 \\ 4,2 \\ 4,59 \\ 4,41 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 7 \times 1 \\ \times \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 134,0384 - (7 \times 19,1094) = \\ (134,0384 - 133,7658) = \\ 0,272684 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{STC} \end{array}$$

Transponemos Y

$$STC = SEC + SRC \quad \text{despejando la SRC tenemos:}$$

$$STC - SEC = SRC \quad \begin{array}{l} Y'Y - n\bar{Y}^2 - \hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2 \\ = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y \end{array} \quad (4.23)$$

$$0,272684 - 0,247514 = 0,02377565 \text{ SRC}$$

Ahora sí:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} \quad R^2 = \frac{0,247514}{0,272684} = 0,907695 \quad (4.10)$$

Como el modelo tiene término independiente su:

$$\tilde{R}^2 = 1 - \frac{\frac{SRC}{n-k}}{\frac{STC}{n-1}} \quad \tilde{R}^2 = 1 - \frac{\frac{0,02377565}{7-3}}{\frac{0,272684}{7-1}} = 0,869213 \quad (4.15)$$

El coeficiente de determinación R^2 nos muestra qué tanto se ajusta la línea de regresión a los datos; el $R^2 = 0,9076$ nos dice que aproximadamente el 91% de la variación de las unidades producidas en las 7 industrias de refrescos está explicada por las variables número de máquinas y número de trabajadores. Si se tiene en cuenta que el R^2 se encuentra entre 0 y 1 ($0 < R^2 < 1$), esta variación es bastante aceptable.

c. Prueba de significancia e intervalos de confianza para B_2 y B_3

Para realizar las pruebas de hipótesis se requieren los errores estándar de los betas; por tanto, debemos hallar la matriz Var-Cov de los betas (ecuación 4.4), la cual como se vio en el capítulo introductorio de ÁLGEBRA matricial, posee en su diagonal las varianzas de los betas y la raíz cuadrada de cada uno de ellos. Recordando la ecuación:

$$\sqrt{\text{var}}\hat{\beta}_i = ee(\hat{\beta}_i)$$

son los errores estándar.

$$\text{Var} - \text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} \quad (4.4)$$

De la matriz $\text{Var} - \text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$ ya tenemos la matriz inversa, pero se debe hallar la varianza de los residuales:

$$\sigma_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k} = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-k} = \frac{y'y - \hat{\beta}'x'y}{n-k} = \frac{SRC}{n-k} \quad (4.5) \quad \sigma_u^2 = \frac{0,02377565}{7-3} = 0,005944$$

$$\begin{matrix} 0,005944 & \times & \begin{bmatrix} 27,1065029 & -6,9220181 & -4,55131445 \\ -6,9220181 & 1,98670246 & 1,07459204 \\ -4,55131445 & 1,07459204 & 0,81019874 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0,16112105 & -0,04114448 & -0,02705301 \\ -0,04114448 & 0,01180896 & 0,00638738 \\ -0,02705301 & 0,00638738 & 0,00481582 \end{bmatrix} \\ & & \begin{matrix} (X'X)^{-1} \\ 3 \times 3 \end{matrix} & & \begin{matrix} \text{Var} - \text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} \\ 3 \times 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\sqrt{\text{var } \hat{\beta}_1} = ee(\hat{\beta}_1) \quad \sqrt{0,16112105} = ee(\hat{\beta}_1) = 0,401399$$

$$\sqrt{0,01180896} = ee(\hat{\beta}_2) = 0,1086682$$

$$\sqrt{0,00481582} = ee(\hat{\beta}_3) = 0,069396$$

d. Prueba de significancia de los coeficientes de regresión. Una prueba de significancia es un procedimiento mediante el cual se utilizan los resultados muestrales para verificar la verdad o falsedad de una hipótesis nula H_0 . **(4.19)**

Bajo el supuesto de normalidad tenemos:

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{e(\hat{\beta}_2)} \quad t = \frac{\alpha}{2} = 2.776 \quad \hat{\beta}_2 = 0,69033233 \quad \alpha = 5\%$$

$$ee(\hat{\beta}_2) = 0,1086682 \quad gl = 4$$

(buscar en la tabla t- anexo, el ejemplo)

Planteamos lo siguiente:

$$H_0 = \beta_2 = \beta_2^* = 0$$

$$H_1 = \beta_2 \neq 0$$

$$t = \frac{0,69033233}{0,1086682} = 6,352662$$



H_0 = se rechaza. B_2 es estadísticamente significativo ya que el valor estadísticamente de prueba cayó en la zona de rechazo.

Para B_3 :

$$t = \frac{\hat{\beta}_3 - \beta_3}{ee(\hat{\beta}_3)} \quad t = \frac{\alpha}{2} = 2.776 \quad \hat{\beta}_3 = 0,32791085 \quad \alpha = 5\%$$

$$ee(\hat{\beta}_3) = 0,069396 \quad gl = 4$$

Planteamos lo siguiente:

$$H_0 = \beta_3 = \beta_3^* = 0$$

$$H_1 = \beta_3 \neq 0$$



$$t = \frac{0,32791085}{0,069396} = 4,725213$$

H₀ = se rechaza. B₃ es estadísticamente significativo ya que el valor estadísticamente de prueba cayó en la zona de rechazo.

Intervalos de significancia:

$$\Pr[\hat{\beta}_2 - t_{\alpha/2} ee(\hat{\beta}_2) \leq \beta_2 \leq \hat{\beta}_2 + t_{\alpha/2} ee(\hat{\beta}_2)] = 1 - \alpha \quad (4.18)$$

$$t = \frac{\alpha}{2} = 2,776 \quad \hat{\beta}_2 = 0,69033233 \quad \alpha = 5\% \\ ee(\hat{\beta}_2) = 0,1086682 \quad gl = 4$$

Planteamos:

$$H_0 = \beta_2 = \hat{\beta}_2$$

$$H_1 = \beta_2 \neq \hat{\beta}_2$$

$$\Pr[(0,69033233) - (2,776) * (0,1086682) \leq \beta_2 \leq (0,69033233) + \\ (2,776) * (0,1086682)] = 95\%$$

$$0,38869 \leq \beta_2 \leq 0,991995 \\ 0,69033233$$

Aceptamos la hipótesis nula.

Dado el coeficiente de confianza de 95% en el largo plazo, en 95 de cada 100 casos, intervalos como (0,38869 - 0,991995) contendrán el verdadero valor de B₂.

B₃

$$\Pr[\hat{\beta}_3 - t_{\alpha/2} ee(\hat{\beta}_3) \leq \beta_3 \leq \hat{\beta}_3 + t_{\alpha/2} ee(\hat{\beta}_3)] = 1 - \alpha$$

$$t = \frac{\alpha}{2} = 2,776 \quad \hat{\beta}_3 = 0,32791085 \quad \alpha = 5\% \\ ee(\hat{\beta}_3) = 0,069396 \quad gl = 4$$

Planteamos:

$$H_0 = \beta_3 = \hat{\beta}_3$$

$$H_1 = \beta_3 \neq \hat{\beta}_3$$

$$\Pr[(0,32791085) - (2,776) * (0,069396) \leq \beta_3 \leq (0,32791085) + (2,776) * (0,069396)] = 95\%$$

$$0,135268 \leq \beta_3 \leq 0,520554$$

$$0,32791085$$

Aceptamos la hipótesis nula.

Dado el coeficiente de confianza del 95% en el largo plazo, en 95 de cada 100 casos, intervalos como $(0,135268 - 0,520554)$ contendrán el verdadero valor de B_2 .

Prueba de significancia de los parámetros en conjunto:

$$F = \frac{SEC(k-1)}{SRC/n-k} = \frac{R^2(k-1)}{(1-R^2)(n-k)} \quad (4.20)$$

reemplazamos:

$$F = \frac{0,247514/(3-1)}{0,02377565/7-3} = \frac{0,9076/(3-1)}{(1-0,9076)/(7-3)} = 20,837581$$

Bajo el supuesto de que los $U_i \rightarrow N(0, \sigma_u^2)$ planteamos la hipótesis nula:



$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$H_1 : \beta_2, \beta_3; \text{al menos un } \beta_i \neq 0$$

Si el $F_c > F_t$, se debe rechazar la hipótesis nula. (buscar en la tabla f- anexo, el ejemplo $(6,94)$)

En nuestro caso el $F_{\text{calculado}} > F_{\text{en tablas}}$ siendo $F(k-1, n-k) \alpha = 5\%$ $1 - \alpha = 95\%$

$$20,837581 > 6,94$$

Ahora, en contraste con el valor p value del F obtenido, nos permite rechazar la hipótesis nula por ser suficientemente bajo.

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$$

2. Se tienen los resultados de la siguiente regresión:

LINREG Y

CONSTANT X1 X2

Dependent Variable Y - Estimation by Least Squares	
Annual Data From 1978:01 To 1992:01	
Usable Observations	15 Degrees of Freedom 12
R**2	0.851461 R**2 ajustado 0.826705
Sum of Squared Residuals	411886.37547
F(2,12)	34.3935
Significance Level of F	0.00001074
Durbin-Watson Statistic	1.517636
Q(3-0)	5.679080
Significance Level of Q	0.12831149

	Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1.	Constant	523.7710	211.3178466	2.47859	0.02903281
2.	X1	17.02586	2.1929287	7.76399	0.00000510
3.	X2	-8.11345	2.1364034	-3.79772	0.00254035

Y = exportaciones de café (miles de dólares)

X1 = precio externo del café (centavos de dólar por libra)

X2 = precio de otros suaves (centavos de dólar por libra)

a. Interprete B_2 y B_3 y el R^2 .

b. Haga la prueba de significancia y el intervalo de confianza para B_2 y B_3 ; interprete $t(\alpha/2) = 2.179$.

c. Haga la prueba de significancia de los parámetros en conjunto e interprete.

f. $(2,12 \text{ } \alpha=5\%) = 3.89$

- d. ¿Para qué se utiliza el estadístico q y que se puede concluir para el modelo planteado?
- e. Describa dos problemas o restricciones que tiene el estadístico Durbin-Watson (d).
- f. Describa brevemente una solución a los problemas del Durbin Watson.
- g. ¿Qué puede concluir a cerca de la AR(1) para el modelo planteado?

Solución

$$\hat{Y} = 523,7710 + 17,02586X_1 - 8,11345X_2$$

Matemáticamente B_2 es la pendiente de la recta.

Económicamente B_2 es el promedio de crecimiento de exportaciones del café durante el periodo 01-1978 a 01-1992.

a. Interpretación de la regresión

Si durante el periodo muestral X_1 , X_2 hubiesen sido 0, el promedio de las exportaciones de café sería de US \$524.000. El coeficiente de regresión parcial 17,02586 significa que al mantener constante X_2 (el precio de otros suaves), el crecimiento observado en las exportaciones de café durante el periodo 01-1978 a 01-1992 en promedio fue de 0,17%; de igual manera, al mantener constante el precio externo del café, el valor de -8,11345 implica que durante el mismo periodo de tiempo las exportaciones totales de café cayeron en aproximadamente 0,08%. El coeficiente de determinación R^2 muestra qué tanto se ajusta la línea de regresión a los datos; el $R^2 = 0,85$ nos dice que aproximadamente el 85% de la variación de las exportaciones totales de café durante el periodo 01-1978 a 01-1992 está explicada por las variables precio externo de café y precio de otros suaves. Si se tiene en cuenta que el R^2 se encuentra entre 0 y 1 ($0 < R^2 < 1$), esta variación es bastante aceptable.

b. Prueba de significancia e intervalos de confianza para B_2 y B_3

Prueba de significancia de los coeficientes de regresión.

Una prueba de significancia es un procedimiento mediante el cual se utilizan los resultados muestrales para verificar la verdad o falsedad de una hipótesis nula H_0 .

Bajo el supuesto de normalidad tenemos:

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{ee(\hat{\beta}_2)} \quad t = \frac{\alpha}{2} = 2.179 \quad \hat{\beta}_2 = 17.02586 \quad \alpha = 5\%$$

$$ee(\hat{\beta}_2) = 2.1929287 \quad gl = 12$$

Planteamos lo siguiente:

$$H_0 = \beta_2 = \beta_2^* = 0$$

$$H_1 = \beta_2 \neq 0$$



$$t = \frac{17.02586}{2.1929287} = 7.7640$$

H_0 = se rechaza. B_2 es estadísticamente significativo ya que el valor estadísticamente de prueba cayó en la zona de rechazo.

Para B_3 :

$$t = \frac{\hat{\beta}_3 - \beta_3}{ee(\hat{\beta}_3)} \quad t = \frac{\alpha}{2} = 2.179 \quad \hat{\beta}_3 = -8.11345 \quad \alpha = 5\%$$

$$ee(\hat{\beta}_3) = 2.1364034 \quad gl = 12$$

Planteamos lo siguiente:

$$H_0 = \beta_3 = \beta_3^* = 0$$

$$H_1 = \beta_3 \neq 0$$



$$t = \frac{-8.11345}{2.1364034} = -3.7977$$

H_0 = se rechaza. B_3 es estadísticamente significativo ya que el valor estadísticamente de prueba cayó en la zona de rechazo.

Intervalos de significancia:

$$\Pr[\hat{\beta}_2 - t_{\alpha/2} ee(\hat{\beta}_2) \leq \beta_2 \leq \hat{\beta}_2 + t_{\alpha/2} ee(\hat{\beta}_2)] = 1 - \alpha$$

$$t = \frac{\alpha}{2} = 2.179 \quad \hat{\beta}_2 = 17.02586 \quad \alpha = 5\% \\ ee(\hat{\beta}_2) = 2.1929287 \quad gl = 12$$

Planteamos:

$$H_0 = \beta_2 = \hat{\beta}_2$$

$$H_i = \beta_2 \neq \hat{\beta}_2$$

$$\Pr[(17.2586) - (2.179) * (2.1929287) \leq \beta_2 \leq (17.2586) + (2.179) * (2.1929287)] = 95\%$$

$$12.2475 \leq \beta_2 \leq 21.8043 \\ 17.2586$$

Aceptamos la hipótesis nula.

Dado el coeficiente de confianza del 95% en el largo plazo, en 95 de cada 100 casos, intervalos como (12.2475, 21.8043) contendrán el verdadero valor de B_2 .

B_3

$$\Pr[\hat{\beta}_3 - t_{\alpha/2} ee(\hat{\beta}_3) \leq \beta_3 \leq \hat{\beta}_3 + t_{\alpha/2} ee(\hat{\beta}_3)] = 1 - \alpha$$

$$t = \frac{\alpha}{2} = 2.179 \quad \hat{\beta}_3 = -8.11345 \quad \alpha = 5\% \\ ee(\hat{\beta}_3) = 2.1364034 \quad gl = 12$$

Planteamos:

$$H_0 = \beta_3 = \hat{\beta}_3$$

$$H_i = \beta_3 \neq \hat{\beta}_3$$

$$\Pr[(-8.11345) - (2.179) * (2.1364034) \leq \beta_3 \leq (-8.11345) + (2.179) * 2.1364034] = 95\%$$

$$-12.7687 \leq \beta_3 \leq 1.8314 \\ -8.11345$$

Aceptamos la hipótesis nula.

Dado el coeficiente de confianza del 95% en el largo plazo, en 95 de cada 100 casos, intervalos como $(-12.7687, 1.8314)$ contendrán el verdadero valor de B_3 .

Prueba de significancia de los parámetros en conjunto

$$F = \frac{SEC(k-1)}{SRC/n-k} = \frac{R^2(k-1)}{(1-R^2)(n-k)} \quad (4.20)$$

Bajo el supuesto de que los $U_i \rightarrow N(0, \sigma_u^2)$ planteamos la hipótesis nula:

$$H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$H_1: \beta_2, \beta_3; \text{al menos un } \beta_i \neq 0$$



Si el $F_c > F_t$, se debe rechazar la hipótesis nula.

En nuestro caso el **F** calculado $>$ **F** en tablas siendo $F(k-1, n-k)\alpha = 5\%$ $1 - \alpha = 95\%$

$$34,3934 > 3,89$$

Ahora, en contraste con el valor p value del F obtenido, nos permite rechazar la hipótesis nula $H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$ por ser suficientemente bajo.

CAPÍTULO 5

SERIES DE TIEMPO

Imagen 12



- Una serie temporal es un conjunto de medidas ordenadas a lo largo del tiempo de una variable de interés.
- Con las series de tiempo se analiza el comportamiento histórico de una variable a través de una función matemática.
- Se utilizan para pronosticar; no se hace análisis estructural.
- Se supone que se dispone de datos en intervalos regulares de tiempo (horas, días, meses, trimestres, años...) y se desea utilizar la posible "inercia" en el comportamiento de la serie para prever su evolución futura.

5.1 Formas de analizar una serie

- Por descomposición de la serie o *determinístico*.
- Un segundo enfoque es el *estocástico*.

5.2 Componentes de una serie

5.2.1 Componente de tendencia

Comportamiento de crecimiento o decrecimiento en un periodo de tiempo.

Imagen 13

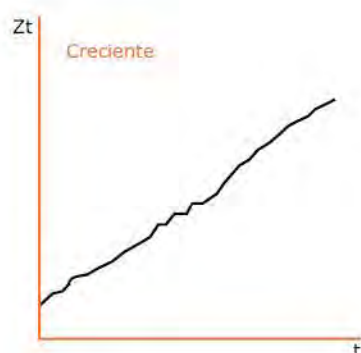


Imagen 14

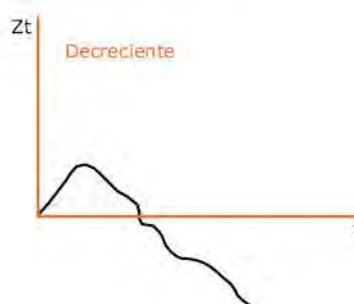
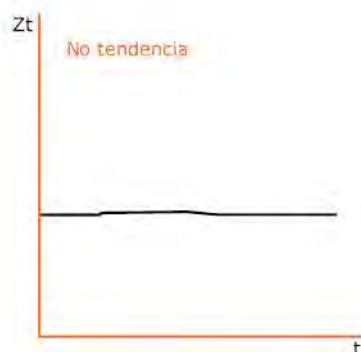


Imagen 15



5.2.2 Componente de estacionalidad

Comportamiento que se repite en intervalos regulares de tiempo y se representa en datos menores al anual; por ejemplo la producción, la inflación, la oferta monetaria, etc.

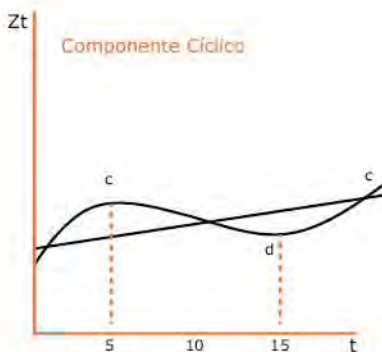
Imagen 16



5.2.3 Componente cíclico

Se repite en periodos prolongados de tiempo, comportamiento de crecimiento o depreciación de las economías o fluctuaciones de la serie respecto a su tendencia.

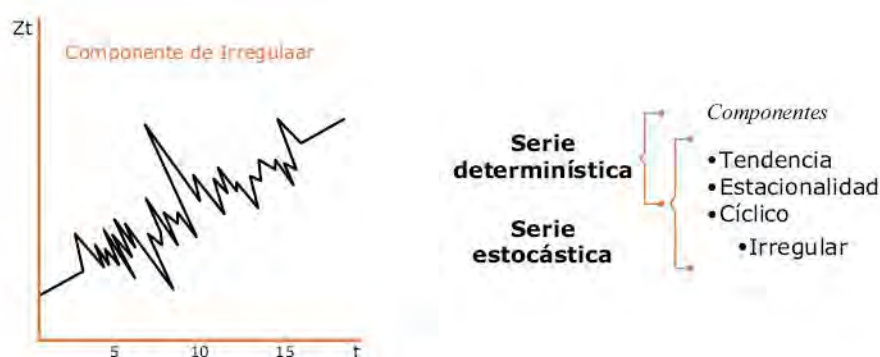
Imagen 17



5.2.4 Componente irregular

Aquel que es debido a la multitud de factores que inciden sobre la serie y es difícil de representar a través de una función matemática. Es preciso este componente, el que da a lugar el análisis estocástico, dado que la irregularidad logra esconder los otros componentes.

Imagen 18



5.3 Promedios móviles para el suavizado de series

- El componente irregular en algunas series temporales puede ser tan grande que esconda cualquier regularidad subyacente lo que hace difícil cualquier interpretación del gráfico temporal. Para evitar esto se hace un suavizado de la serie con los promedios móviles.
- En caso de datos trimestrales se utiliza el promedio móvil de 4 puntos y en datos mensuales promedios móviles de 12 puntos.

5.3.1 Pasos para el cálculo de índices estacionales, desestacionalización de series y predicción

- Calcular el promedio móvil para la serie de tiempo (\bar{Z}_{ts}). Como los datos son trimestrales en nuestro ejemplo, realizamos el promedio cada 4 datos, donde perdemos 4 observaciones (2 al inicio y 2 al final). Por tanto, para realizar promedios mensuales el promedio es cada 12 datos, luego también perdemos 12 observaciones (6 al inicio y 6 al final).
- Centrar el promedio móvil si es necesario. \bar{Z}_{tc}

	Z_t		\bar{Z}_{ts}	\bar{Z}_{tc}	
00 I	8	}	6,5	6,625	→ 75,47
II	3				
III	5				
IV	10				
		}	6,75	6,875	→ 145,45
01 I	9		7	7,125	→ 126,32
II	4		7,25	7,375	→ 54,23
III	6		7,5	7,625	→ 78,69
IV	11	}	7,75	7,875	→ 139,68
02 I	10		8	8,125	→ 123,08
II	5		8,25	8,375	→ 59,7
III	17		8,5		
IV	12				

- Calcular la razón $\frac{\text{Valor real}}{\text{promedio movil}} * 100 = \frac{X_t}{X_t^*} * 100$

Ejemplo para el III trimestre del 00:

$$\frac{5}{6,625} * 100 = 75,47$$

Para el III trimestre del 01:

$$\frac{6}{7,625} * 100 = 78,689$$

- Organizar las razones $\frac{X_t}{X_t^*} * 100$ de acuerdo con la periodicidad (trimestres y meses) y calcular la media de cada trimestre o mes (Índice_o).

	I	II	III	IV	
00	-	-	75,470	145,45	
01	126,32	54,24	78,69	139,68	
02	123,08	59,7	-	-	
indices estacionales →	124,7	56,97	77,08	142,565	401,315 ← Se ajusta el índice porque debe ser 400

¿Qué tanto cambia el comportamiento de la variable con respecto a su valor medio?

Para eliminar los datos atípicos y no dañar los índices estacionales se eliminan los datos máximo y mínimo antes de sacar el promedio.

- Ajustar el índice $I_{ajustado} = I_o \frac{\sum I_r}{\sum I_o}$

$$I_A = I_o \frac{\sum I_r}{\sum I_o} \quad I_A = I_I + I_{II} + I_{III} + I_{IV} = 400$$

$$I_I = \frac{400 \times 124,7}{401,31} = 124,29 \quad I_{III} = \frac{400 \times 77,080}{401,31} = 76,83$$

	I_I	I_{II}	I_{III}	I_{IV}	
indices estacionales ⇒	124,7	56,97	77,080	142,565	401,315
indices ajustados ⇒	124,29	56,78	76,83	142,10	400

- Finalmente se ajusta la serie original como:

$$\text{Valor ajustado} = \text{valor original} * \left(\frac{100}{\text{Índice ajustado}} \right)$$

Una vez eliminada la variación estacional se puede calcular la línea de tendencia sin variación estacional, la cual puede ser proyectada hacia el futuro. Finalmente se incluye el componente estacional multiplicando la proyección por el componente correspondiente del índice.

$$I_I = 8 * \left(\frac{100}{124,29} \right) = 6,436 \quad I_{II} = 3 * \left(\frac{100}{56,78} \right) = 5,28$$

$$I_{III} = 5 * \left(\frac{100}{76,83} \right) = 6,81 \quad I_{IV} = 10 * \left(\frac{100}{142,095} \right) = 7,04$$

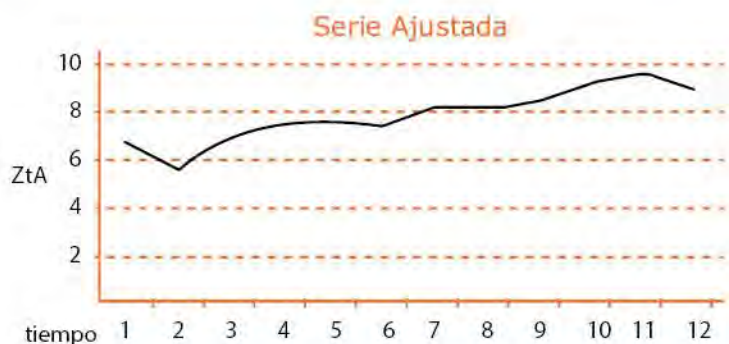
8	6,436
3	5,283
5	6,508
10	7,037
9	7,241
4	7,044
6	7,810
11	7,741
10	8,046
5	8,805
7	9,111
12	8,445

Imagen 19



Con la serie ajustada extraemos la tendencia.

Imagen 20



5.4 Series de tiempo vistas como procesos estocásticos

- Definimos una *serie temporal* como una variable $Z_i = Z(t_i)$ en la que $i = t_i = 1, 2, \dots, n$ indica los diferentes momentos del tiempo para una serie de longitud n y donde todos los intervalos entre observaciones son iguales (es decir, todos están referidos a días, meses o años).
- *Proceso estocástico* es una sucesión de variables aleatorias $\{Z_t\}$ $t = -\infty, \dots, +\infty$; cada dato de la serie es considerado como una variable aleatoria.

5.4.1 Procesos estocásticos

- En el contexto de los modelos estocásticos toda serie temporal se considera generada por un proceso estocástico.
- Los valores de la serie de tiempo $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ pueden considerarse así como *realizaciones* muestrales de las variables teóricas Z_1, Z_2, \dots, Z_n con una probabilidad de ocurrencia deducidas de una supuesta función de distribución conjunta $p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

<i>variable teórica</i>	<i>probabilidad de ocurrencia</i>
Z_1	ξ_1
Z_2	ξ_2
Z_3	ξ_3
Z_4	ξ_4
\vdots	\vdots
Z_n	ξ_n

5.4.2 Hipótesis simplificadoras

- No se hará distinción entre una variable aleatoria Z_t y su valor observado ξ_t , que se denotará también por Z_t .
- Se considera que el proceso es exactamente estacionario, es decir que:

$$F(Z_{t1}, Z_{t2}, \dots, Z_{tn}) = F(Z_{t1+k}, Z_{t2+k}, \dots, Z_{tn+k})$$

Estacionario \rightarrow la función no cambia a través del tiempo.

- Si se admite que las distribuciones de probabilidad son normales, para su caracterización sería suficiente conocer medias y varianzas-covarianzas.

5.4.3 Uso de operadores retraso

- *Operador de retraso* se denota por la letra B .
- Este se define mediante la relación $BZ_t = Z_{t-1}$ para todo t ($\forall t$). Por aplicación sucesiva del operador B se obtiene:

Z_t	Z_{t-1}	Z_{t-2}	$B^2 Z_t = B(B Z_t) = B(Z_{t-1}) = Z_{t-2}$
8			$Z_t = B(B^2 Z_t) = B(Z_{t-2}) = Z_{t-3}$
3	8		$B^k Z_t = B(B^{k-1} Z_t) = B(Z_{t-(k-1)}) = Z_{t-k}$
9	3	8	
7	9	3	
3	7	9	<i>Generalizando:</i>
5	3	7	$B^k Z_t = Z_{t-k} \quad \text{para } K = 0, 1, 2, \dots \forall_t$
6	5	3	

Nótese que por cada rezago se pierde una observación.

5.4.4 Polinomios de retraso

El uso de polinomios de retraso es de particular importancia porque permiten expresar de una manera concisa y simple algunos de los modelos que han probado ser de mayor utilidad en la práctica para representar fenómenos reales.

5.5 Modelos más utilizados en series de tiempo

5.5.1 Autorregresivos

Cuando la serie Z_t está en función de ella misma rezagada 1, 2, 3... p periodos, se define como autorregresivos.

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \quad \rightarrow AR(p)$$

Suponemos que se les ha restado la media a todas las variables (μ).

$\phi \rightarrow$ es el coeficiente para estimar.

$$Z_t - \phi Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p} = a_t$$

Incluyendo el operador de rezagos B , tenemos:

$$Z_t - \phi B Z_t - \phi_2 B^2 Z_t - \dots - \phi_p B^p Z_t = a_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Z_t = a_t \quad \rightarrow (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(Z_t - \mu) = a_t$$

Polinomios de rezagos.

$$\phi_p(B)(Z_t - \mu) = a_t$$

$$\phi_p(B) Z_t = a_t$$

5.5.2 Promedios móviles:

Es cuando la serie está en función de los residuos, su comportamiento en periodos anteriores.

$$Z_t = a_t - \theta a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad \rightarrow MA(q)$$

$\theta \rightarrow$ es el coeficiente para estimar. Introducimos el operador de rezago B .

$$Z_t = a_t - \theta B a_{t-1} - \theta_2 B^2 a_{t-2} - \dots - \theta_q B^q a_{t-q}$$

$$Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t$$

$$Z_t = \theta_q(B) a_t \quad Z_t - \mu = \theta_q(B) a_t$$

5.5.3 Autorregresivos de promedios móviles

Es cuando la serie va a estar en función de ella misma rezagada 1, 2, 3... p periodos y los residuos van a estar rezagados 1, 2, 3... q periodos.

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad \rightarrow ARMA(p, q)$$

$$\phi_p(B) Z_t = \theta_q(B) a_t$$

Restándole la media a todas las variables:

$$\phi_p(B)(Z_t - \mu) = \theta_q(B) a_t$$

5.5.4 Operador de diferencia

Imagen 21



⇒

Imagen 22



Este operador se utiliza para expresar relaciones del tipo $Y_t = Z_t - Z_{t-1}$. Se define ∇ mediante $\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$ para todo t .

La variable Y_t puede escribirse como $Y_t = \nabla Z_t$.

La relación que liga a ∇ con B es $\nabla Z_t = Z_t - B Z_t$.

$$\nabla Z_t = (1-B) Z_t \quad \nabla = (1-B)$$

- Cuando la serie se estacionaliza en la primera diferencia (∇), la serie se define de *orden 1*.

$$\nabla^2 = (1-B)^2 = 1 - 2B + B^2$$

$$\nabla^2 Z_t = (1 - 2B + B^2) Z_t = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}$$

$$\nabla(\nabla Z_t) = \nabla(Z_t - Z_{t-1}) = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-1} + Z_{t-2} = \nabla^2 Z_t$$

- Cuando la serie se estacionaliza en la segunda diferencia (∇^2), la serie se define de *orden 2*.

Ojo, al diferenciar la serie aumenta su varianza.

5.6 Ecuaciones en diferencias estocásticas

El término *Ec* en diferencia sirve para anotar el equivalente discreto de las ecuaciones diferenciales que involucra variables a través del tiempo. Para escribir el equivalente discreto de:

$$\frac{\partial Z_t}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\nabla Z}{\nabla t}$$

5.6.1 Ecuación en diferencia de primer orden

$$Z_t = a_o + a_1 Z_{t-1}$$

$$Z_t - a_1 Z_{t-1} = a_o$$

$$(1 - a_1 B) Z_t = a_o$$

al operar ambos lados por $(1 - a_1 B)^{-1}$

$$Z_t = \frac{a_o}{1 - a_1} + s a_1^t \quad Z_o = \frac{a_o}{1 - a_1} + s$$

5.6.1.1 Ecuación en diferencia de primer orden (solución particular)

$$Z_t = \underbrace{\frac{a_o}{1 - a_1}}_{\substack{\text{sol. particular} \\ \text{indica trayectoria equilibrio}}} + \underbrace{\left(Z_o - \frac{a_o}{1 - a_1}\right) a_1^t}_{\substack{\text{sol. complementaria} \\ \text{desv respecto al equilibrio en temporal}}}$$

Generalizando se tiene:

$$Z_t = \underbrace{A}_{\substack{\text{solucion} \\ \text{particular}}} + \underbrace{C a_1^t}_{\text{constante}} \quad \text{donde la trayectoria temporal de } a_1^t \text{ sera :}$$

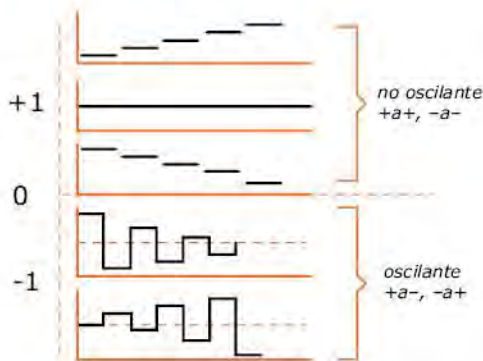
no oscilante $\rightarrow a_1 > 0$

oscilante $\rightarrow a_1 < 0$

divergente $\rightarrow |a_1| > 1$

convergente $\rightarrow |a_1| < 1$

Imagen 23



no oscilante $\rightarrow a_1 > 0$

oscilante $\rightarrow a_1 < 0$

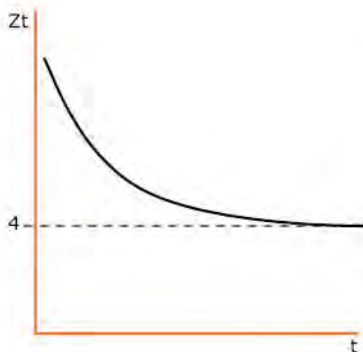
divergente $\rightarrow |a_1| > 1$

convergente $\rightarrow |a_1| < 1$

Donde A es punto donde converge la trayectoria - nivel de equilibrio.

Ejemplo: considere la Ec en diferencia $(1 - 0.5B) Z_t = 2$ junto con la condición inicial $Z_0 = 50$.

Imagen 24



$$Z_t = \frac{a_0}{1 - a_1} + s a_1^t \rightarrow Z_t = \frac{2}{\underbrace{1 - 0.5}_4} + s(0.5)^t$$

$$Z_0 = 50 + s \rightarrow Z_0 = 4 + s = 50 \rightarrow s = 46$$

La solución a esta Ec será: $Z_t = 4 + 46(0.5)^t$. Debido a que $|a_1| < 1$, entonces el proceso tiende a estabilizarse en el punto 4 cuando t es grande.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Zt	27	15.5	9.75	6.87	5.44	4.72	4.36	4.18	4.09	4.04	4.02

5.6.2 Ecuación en diferencia de segundo orden

$$Z_t = a_0 + a_1 Z_{t-1} + a_2 Z_{t-2}$$

$$Z_t - a_1 Z_{t-1} - a_2 Z_{t-2} = a_0$$

$$(1 - a_1 B - a_2 B^2) Z_t = a_0$$

cuya solución general es: *inversa* *inversa*
raíz 1 raíz 2

$$Z_t = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2} + s_1 g_1^t + s_2 g_2^t$$

$$Z_t = \frac{a_0}{(1 - g_1)(1 - g_2)} + s_1 g_1^t + s_2 g_2^t$$

Si g_1 y g_2 son reales y diferentes

$$Z_t = \frac{a_0}{(1 - g)^2} + s_1 g^t + s_2 t g^t$$

Si g_1 y g_2 son reales e iguales

$$Z_t = \frac{a_0}{(1 - g_1)(1 - g_2)} + r^t [(s_1 + s_2) \cos(\theta t) + i(s_2 - s_1) \sin(\theta t)]$$

Si g_1 y g_2 son complejos

Ejemplo: considere la Ec en diferencia $(1 - 0.9B + 0.2B^2) Z_t = 3$ junto con las condiciones iniciales $Z_0 = 0$ y $Z_1 = 50$.

$$Z_t = \underbrace{0.9}_{a_1} Z_{t-1} - \underbrace{0.2}_{a_2} Z_{t-2} + \underbrace{3}_{a_0}$$

$$\frac{a_0}{1-a_1-a_2} = \frac{3}{1-0.9+0.2} = 10 \quad x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4(a*b)}}{2(a*b)}$$

$$s_1 = -450 \quad s_2 = 440 \quad x = \frac{0.9 \pm \sqrt{0.9^2 - 4(0.2*0.9)}}{2(0.2*0.9)}$$

$$Z_0 = 10 + s_1(0.4)^0 + s_2(0.5)^0 = 0$$

$$Z_1 = 10 + s_1(0.4)^0 + s_2(0.5)^2 = 50$$

La solución a esta Ec será: $Z_t = 10 - 450 (0.4)^t + 440 (0.5)^t$. Debido a que $|g_1| < 1$ y $|g_2| < 1$, entonces el proceso tiende a estabilizarse en el punto 10 cuando t es grande.

5.6.3 Ecuación en diferencia caso general

$$(1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots - a_p B^p) Z_t = a_0$$

cuya solución general es:

$$Z_t = \frac{a_0}{(1-g_1)(1-g_2)\dots(1-g_p)} + s_1 g_1^t + s_2 g_2^t + \dots s_p g_p^t$$

5.7 Procesos estacionarios

Se dice que un proceso estocástico es estacionario si su media y su varianza son constantes en el tiempo y si el valor de la covarianza entre dos periodos depende solamente de la distancia o rezago entre ellos y no del tiempo en el cual se haya calculado.

5.7.1 Condiciones de estacionariedad

- Media estacionaria: la media debe ser igual al valor esperado.

$$\mu_{zt} = E(Z_t) = E(Z_{t+m}) = \mu \text{ para todo } t \text{ y } m$$

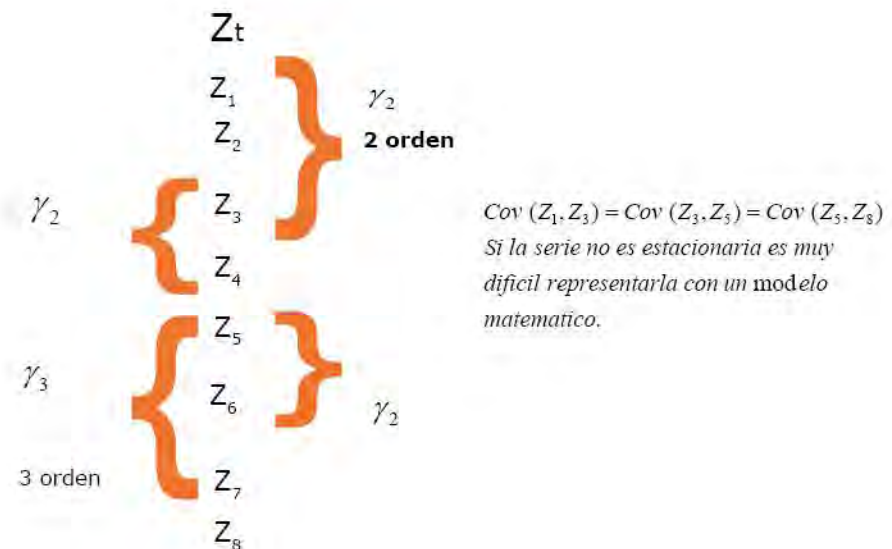
- Varianza estacionaria

$$\text{Var}(Z_t) = E[(Z_t - \mu)^2] = E[(Z_{t+m} - \mu)^2] = \gamma_0$$

- Covar depende del retardo k.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_t, Z_{t+k}) &= E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)] = E[(Z_{t+m} - \mu)(Z_{t+k+m} - \mu)] \\ &= \text{cov}(Z_{t+m}, Z_{t+k+m}) = \gamma_k \end{aligned}$$

Ejemplo:



5.7.2 Coeficiente de correlación simple ρ

- Se utiliza para evitar la influencia de las unidades de medida. Se denota como $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots$

$$\rho_k = \frac{E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(Z_t - \mu)^2]E[(Z_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{\text{cov}(Z_t, Z_{t+k})}{\sigma_{Z_t} \sigma_{Z_{t+k}}}$$

- Como en los procesos estacionarios $\sigma_Z = \sigma_{Z+k}$

$$\text{Entonces } \rho_k = \frac{COV(Z_t, Z_{t+k})}{VAR(Z_t)} = \frac{\gamma_K}{\gamma_0}$$

y por tanto $\rho_0 = 1 \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Imagen 25

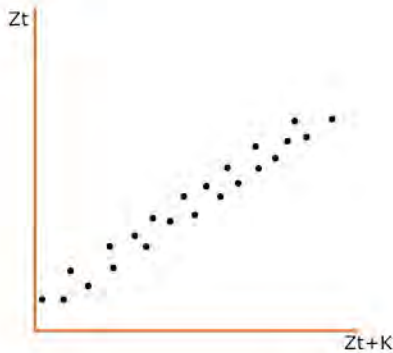
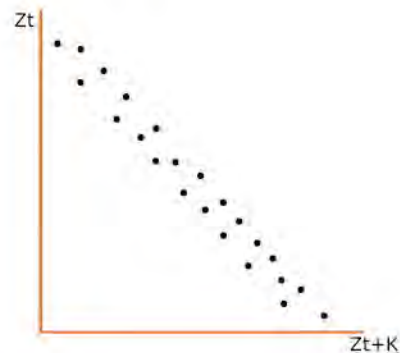


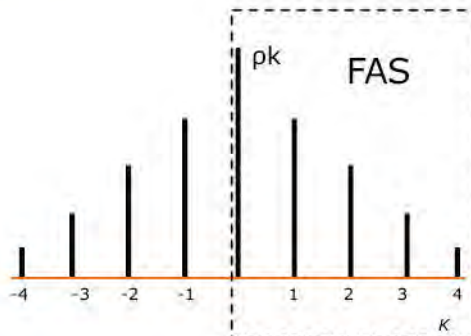
Imagen 26



5.8 Función de autocorrelación simple -FAS

FAS o correlograma es la representación de los coeficientes de autocorrelación en función del retardo.

Imagen 27



Dado que $\rho_k = \rho_{-k}$, entonces cuando se representa gráficamente ρ_k para diferentes valores de k , basta con considerar únicamente los valores positivos de k .

5.8.1 Proceso ruido blanco

Un proceso estacionario muy importante es el definido por:

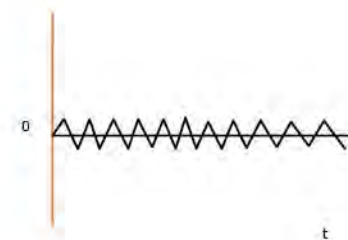
- $E(Z_t) = 0$
- $\text{Var}(Z_t) = \sigma^2$ homocedasticidad
- $\text{Cov}(Z_t, Z_{t-k}) = 0 \quad \forall k \neq 0$ no autocorrelación



Se le exigen
a los residuos
del modelo

Este proceso se denomina proceso ruido blanco; si los residuos no cumplen estas condiciones, al modelo le falta algo.

Imagen 28



*Los procesos estacionarios tienen
incrementos estacionarios*

$Z_t \rightarrow$ estacionaria
 $W_t = \nabla Z_t = \underbrace{Z_t - Z_{t-1}}_{\text{diferencia}}$ tambien es estacionaria



Al diferenciar aumenta
su varianza

5.8.2 Proceso homogéneo-integrado de orden 1

La mayoría de las series no son estacionarias; aumentan su varianza pero se pueden volver a diferenciar.

Cuando una serie no es estacionaria y con la primera diferencia se vuelve estacionaria, se dice que el proceso es homogéneo de orden 1 o $I(1)$.

$$\{Z_t\}, t = 1, \dots, n \rightarrow W_t$$

$$W_t = Z_t - Z_{t-1} \rightarrow W_t = I(1)$$

Si se requieren dos diferencias para volver la serie estacionaria, el proceso es homogéneo de orden 2 o $I(2)$.

Imagen 29

$$= a + b_t + \varepsilon_t$$

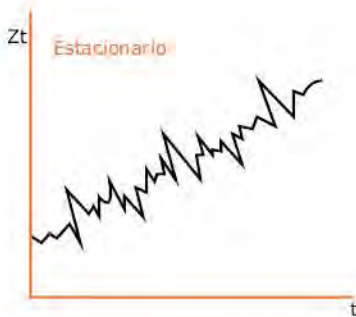
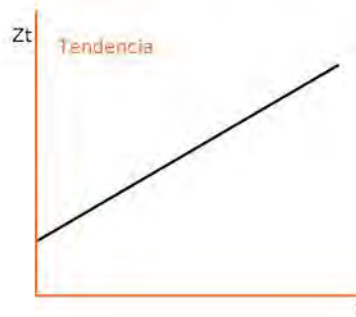


Imagen 30

$$Z_t = \underbrace{a + b_t}_{\text{(sin la estacionariedad)}}$$

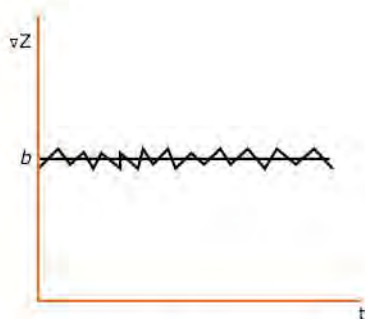


5.8.3 Integradas de orden 1

$$\nabla Z_t = a + b_t + \varepsilon_t - (a + b(t-1) + \varepsilon_{t-1})$$

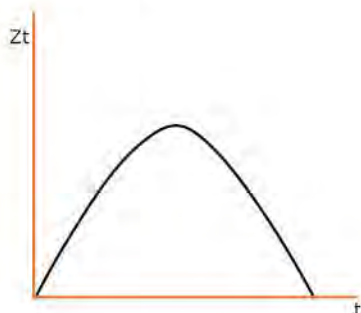
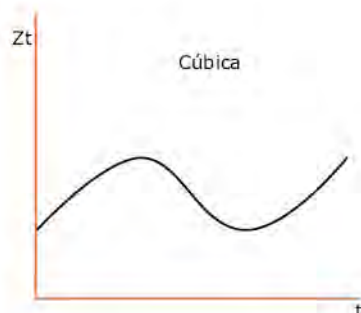
$$= a + b_t + \varepsilon_t - a + b_t + b - \varepsilon_{t-1}$$

$$\nabla Z_t = b_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = b + \nabla \varepsilon_t$$

Imagen 31

Donde b es la constante y $\nabla \varepsilon_t$ es estacionaria.

Si la serie es resultado de una función cuadrática + ε se requiere la doble diferenciación.

Imagen 32**Imagen 33**

Si una serie es el resultado de un polinomio de orden h + un proceso estacionario (ε), esa serie requiere de h diferenciaciones para volverla estacionaria.

5.8.4 Procesos autorregresivos

La serie está representada en ella misma rezagada 1, 2, 3... p periodos; es decir, básicamente es una ecuación de regresión lineal con la característica especial de que la variable dependiente Z en el periodo t depende de sus propios valores observados en periodos anteriores a t y ponderados de acuerdo con los coeficientes autorregresivos $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_p$.

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \quad \rightarrow AR(p)$$

Donde $\phi \rightarrow$ son las ponderaciones de la importancia de cada uno de los rezagos.

5.8.4.1 Procesos AR de primer orden AR(1)

$$\begin{aligned} Z_t &= \phi Z_{t-1} + a_t \\ 1 - \phi Z_{t-1} &= a_t \\ Z_t - \phi B Z_t &= a_t \\ (1 - \phi B) Z &= a_t \end{aligned} \quad \begin{cases} E(a_t) = 0 \quad \forall_t \\ Var(a_t) = \sigma_a^2 \quad \forall_t \\ Cov(a_t, a_{t-k}) = 0 \quad \forall_t \\ Cov(a_t, a_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_a^2 & k=0 \\ 0 & k > 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{aligned} Z_t &= Z_t - u \\ \text{donde } a_t &\text{ es ruido blanco} \\ \frac{\sigma_z^2}{(1-\phi^2)} &= \sigma_z^2 = \gamma_o - 1 < \phi < 1 \\ \gamma_k &= \phi_k \gamma_o \end{aligned}$$

$$Z_t = (1 - \phi B)^{-1} a_t \quad \rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_o} = \frac{\phi^k \gamma_o}{\gamma_o} = \phi^k$$

$$\frac{1}{1-\phi} = (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \phi^3 B^3 + \dots) a_t$$

$$Z_t = a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \phi^3 a_{t-3} + \dots \quad MA(\infty)$$

$$AR(1) = MA(\infty)$$

Equivalente

$$\diamond E(Z_t) = 0 \rightarrow \forall_t E(a_t) = 0$$

$$\diamond Var(Z_t) = (\sigma_a^2 + \phi^2 \sigma_a^2 + \phi^4 \sigma_a^2 + \phi^6 \sigma_a^2 \dots)$$

$$Var(Z_t) = \frac{\overbrace{1 + \phi^2 + \phi^4 + \phi^6 \dots}^1}{(1 - \phi^2)} = \frac{\sigma_a^2}{(1 - \phi^2)}$$

$$\diamond Cov(Z_t, Z_{t-k})$$

$$E(\phi Z_{t-k})$$

$$E(Z_t, Z_{t-k}) =$$

5.8.4.2 Procesos AR de segundo orden AR(2)

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-2} + a_t \quad Z_t = Z_t - \mu$$

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2) Z_t = a_t$$

a_t es ruido blanco

$$\bullet k > 0 \quad Y_k = \varphi_1 Y_{k-1} + \varphi_2 Y_{k-2}$$

$$\bullet K=0 \quad Y_0 = \varphi_1 Y_1 + \varphi_2 Y_2 + \sigma_a^2$$

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} \quad k > 0$$

$$\rho_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \rho_1 \quad \text{para } k=1$$

$$\rho_2 = \varphi_1 \rho_1 + \varphi_2 \quad \text{para } k=2$$

$$\sigma_z^2 = \frac{(1 - \phi_2) \sigma_a^2}{(1 + \phi_2)(1 - \phi_1 - \phi_2)(1 + \phi_1 - \phi_2)}$$

Condiciones para que un proceso AR(2) sea estacionario:

$$-1 < \varphi_2 < 1 \quad \varphi_1 + \varphi_2 < 1$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 < 1$$

5.9 Función de autocorrelación parcial -FAP

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

La autocorrelación parcial entre Z_{t-2} y Z_t elimina los efectos de Z_{t-1} ; así la autocorrelación parcial entre Z_t y Z_{t-5} elimina los efectos de Z_{t-1} , Z_{t-2} , Z_{t-3} y Z_{t-4}

En un proceso AR(1) la autocorrelación parcial entre Z_t y Z_{t-2} es igual a cero. En un proceso AR(2) la autocorrelación parcial entre Z_t y Z_{t-3} es igual a cero, etc.

De la anterior definición se deduce que un proceso AR(p) tendrá los primeros p coeficientes de autocorrelación parcial distintos de cero y por tanto en la FAP el número de coeficientes distintos de cero indican el orden del proceso.

Imagen 34



Es un AR(1) si la FAS está decreciendo.

Imagen 35



Es un AR(2) si la FAS está decreciendo.

Imagen 36



Es un AR(1) si la FAS está decreciendo.

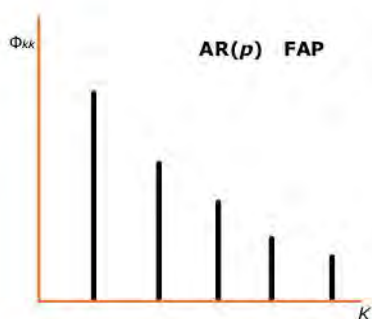
Imagen 37



Es un AR(2) si la FAS está decreciendo.

Finalmente:

Imagen 38



El camino más directo para encontrar las FAP es a través de la ecuación de regresión.

- $Z_t = \varphi_{11} Z_{t-1} + e_t$ orden 1
- $Z_t = \varphi_{21} Z_{t-1} + \varphi_{22} Z_{t-2} + e_t$ orden 2
- $Z_t = \varphi_{k1} Z_{t-1} + \varphi_{k2} Z_{t-2} + \dots + \varphi_{kk} Z_{t-k} + e_t$ orden k

Los coeficientes φ_{11} , φ_{22} , φ_{kk} son los coeficientes de correlación parcial.

Imagen 39

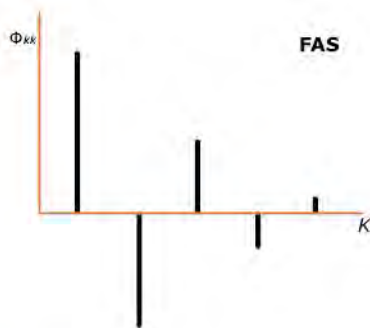


Imagen 40



Imagen 41

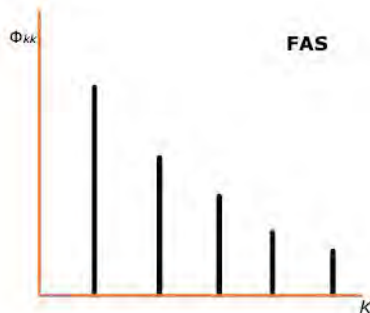


Imagen 42



5.9.1 Significancia de los φ_{kk}

- Para comprobar la significancia de φ_{kk} se utiliza una t.

$$t = \frac{\hat{\phi}_{kk}}{\sqrt{\frac{1}{N} \hat{\phi}_{kk}^2}} = \sqrt{N} \hat{\phi}_{kk} \quad \hat{\phi}_{kk} \rightarrow N(0, 1/N)$$

Desviación estándar

En los paquetes econometricos lo que se encuentra dentro de las bandas es no significativo y lo que sobresalga es significativo.

El valor calculado se contrasta con un valor crítico $t_c = 2$ para $\alpha = 0.05$

5.9.2 Procesos media móvil -MA

Los modelos MA representan un proceso estocástico $\{Z_t\}$ cuyos valores pueden ser dependientes unos de otros como una suma finita ponderada de choques aleatorios independientes $\{a_t\}$, o sea

$$Z_t = a_t - \theta a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \rightarrow MA(q)$$

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ son ponderaciones (parámetros de promedios móviles) asociadas a los choques aleatorios en los periodos $t-1, t-2, \dots, t-q$ respectivamente.

5.9.2.1 Proceso MA(1)

$$Z_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

$$Z_t = (1 - \theta B) a_t$$

Si $|\theta| < 1$ existe operador inverso $(1 - \theta B)^{-1}$

$$\gamma_k = \theta \sigma_a^2 \text{ si } k=1$$

$$\gamma_k = 0 \text{ si } k > 1$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{-\theta}{1+\theta^2} \text{ si } k=1$$

$$\rho_k = 0 \text{ si } k > 1$$

De aquí se obtiene que la FAS de un proceso MA(1) es igual a cero para $k > 1$.

5.9.2.2 Proceso MA(2)

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

Y es estacionario para todos los valores de θ_1 y θ_2 y es invertible solamente si las raíces características de la ecuación $(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) = 0$ caen fuera del círculo unitario; eso es si cumple que:

$$\theta_2 + \theta_1 < 1 \quad (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) = 0$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$$-1 < \theta_2 < 1$$

5.9.2.3 Proceso ARMA

El proceso autorregresivo y de promedios móviles ARMA(p,q) se representa mediante

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t$$

o en notación compacta

$$\phi_p(B) Z_t = \theta_q(B) a_t$$

Dicha generalización surge del hecho de que las series de tiempo que se observan en la práctica muchas veces presentan características tanto de procesos AR como de procesos MA.

5.9.2.3.1 Proceso ARMA(1, 1)

El proceso más simple es el ARMA(1,1), que se escribe

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

$$(1 - \phi_1 B) Z_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

donde ϕ_1 es diferente de θ_1 y $|\phi| < 1$ para que el proceso sea estacionario y $|\theta| < 1$ para que sea invertible.

Imagen 43

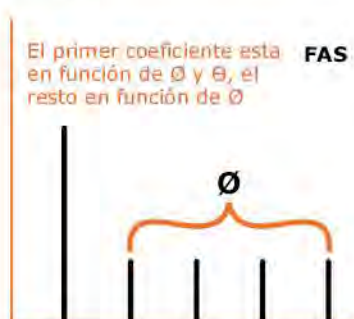
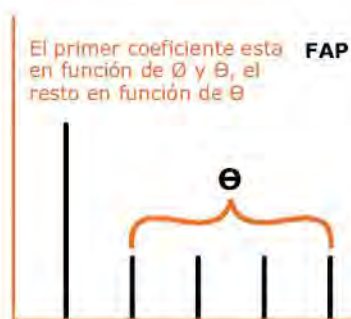


Imagen 44



	FAS	FAP
AR(ρ)	Muchos coeficientes no nulos que decrecen con el retardo como mezcla de exponenciales y senoides	ρ primeros coeficientes no nulos y el resto cero
MA(q)	q primeros coeficientes no nulos y el resto cero	Muchos coeficientes no nulos que decrecen con el retardo como mezcla de exponenciales y senoides
ARMA(ρ, q)	q coeficientes iniciales que dependen del orden de la parte MA y después un decrecimiento dictado por la parte AR	ρ valores iniciales que dependen del orden de la parte AR(ρ) y seguidos de decrecimientos que dependen de la parte MA

5.10 Procesos para series no estacionarios

- En la discusión de los procesos AR, MA y ARMA nos basamos en las suposiciones de que las series de tiempo eran estacionarias; desafortunadamente muchas de las series observables en economía son no estacionarias.
- Un caso especial de procesos no estacionarios es el paseo aleatorio (*random walk*).

Imagen 45

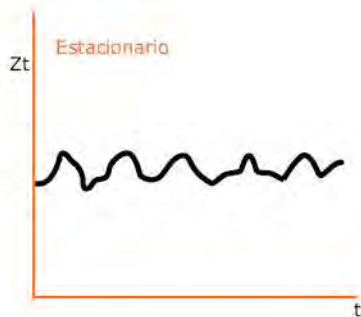


Imagen 46



Imagen 47



5.10.1 Paseo aleatorio

En la ecuación $Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$ si $|\phi| = 1$ el proceso no es estacionario, pero tampoco es explosivo; se convierte en un proceso homogéneo de orden uno (ya que su primera diferencia $Z_t - Z_{t-1} = a_t$ sí es un proceso estacionario) que se denomina *paseo aleatorio*.

5.10.2 Proceso ARIMA

Es un proceso del tipo:

$$(1 - \phi B - \phi_2 B^2 \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d Z_t = (1 - \theta B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t$$

$$\phi_p(B)\nabla^d Z_t = \theta_q(B)a_t$$

que llamaremos proceso autorregresivo integrado de media móvil -ARIMA(p,d,q).

En esta notación p es el orden de la parte AR estacionaria, d es el número de raíces unitarias (orden de homogeneidad del proceso) o número de diferenciaciones requeridas y q es el orden de la parte de media móvil.

Llamando $\nabla = 1 - B$ al operador de diferencia, cuando una serie es no estacionaria, la diferenciamos (∇^d) y la volvemos estacionaria.

$$W_t = (1 - B)Z_t$$

$$\frac{1}{(1-B)} W_t = Z_t$$

$$\underbrace{(1+B+B^2+B^3+\dots)}$$

$$W_t + W_{t-1} + W_{t-2} + W_{t-3} \dots = Z_t$$

5.10.3 Construcción de modelos de series de tiempo por la metodología Box-Jenkins (1970)

a. Identificación de un posible modelo dentro de la clase de modelos ARIMA(p,d,q); es decir, determinación de los valores p , d y q que especifiquen el modelo ARIMA apropiado para la serie en estudio.

Imagen 48

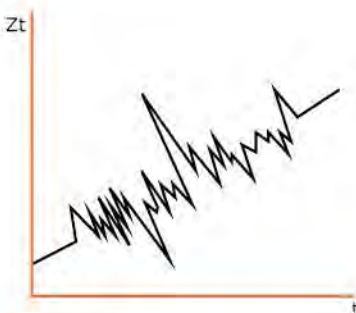
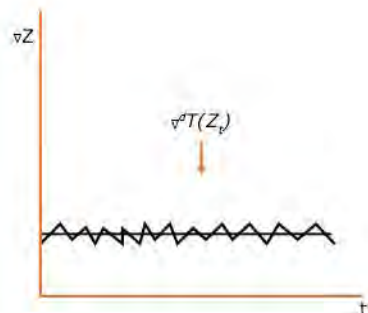


Imagen 49



- b. Estimación de los parámetros involucrados en el modelo a través de técnicas de estimación no lineales.
- c. Diagnóstico o chequeo del modelo con el objeto de comprobar si las hipótesis básicas realizadas respecto a los residuos son ciertas.

5.10.3.1 Identificación

La identificación como tal requiere:

- Decidir qué transformación aplicar para convertir el proceso subyacente en estacionario (determinar la transformación para estacionarizar la varianza T o el número de diferenciaciones para estacionarizar media d).
- Determinar un modelo para el proceso estacionario; es decir, los órdenes p y q de su representación $\text{ARMA}(p,q)$

5.10.3.2 Estimación

Para un modelo $\text{ARMA}(p, q)$, que es la forma más general, se discutirá la estimación de los parámetros

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_p)$$

$$\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_q)$$

Para AR puros se puede utilizar MCO.

Para ARIMA se utilizan técnicas de estimación por mínimos cuadrados no lineales (NLS).

Box Jenkins sugiere un método de estimación no lineal (MCNL) basado en el algoritmo de Marquardt (1963).

(RATS → estima por el método Gauss-Newton).

5.10.3 Diagnóstico o chequeo

Comprobar si los residuos del modelo cumplen las condiciones de ruido blanco.

$$E(a_t) = 0$$

$$\text{Var}(a_t) = \sigma^2$$

$$\text{Cov}(a_t, a_{t-k}) = 0 \text{ para todo } k \text{ diferente de cero}$$

El supuesto más importante para medir la validez de un modelo ARIMA tiene que ver con suposición que los errores aleatorios son independientes; es decir, son no autocorrelacionados.

5.10.4 Formas de hacer chequeo del modelo

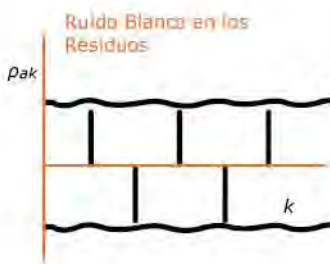
1. La FAS de los residuos: la FAS residual para un modelo ARIMA idealmente tendrá coeficientes de autocorrelación que podrán ser estadísticamente iguales a cero. Para verificar esta condición se utilizan las pruebas de Ljung-Box y Box-Pierce.
2. Gráfico de los residuos
3. Técnica de la sobreestimación

5.10.4.1 La FAS en los residuos

$$FAS \rightarrow Z_t$$

$$FAS \rightarrow \hat{a}_t$$

Imagen 50



$$\rho_{ak} \quad H_0 = \rho_{a1} = \rho_{a2} = \rho_{a3} = \dots = \rho_{an} = 0$$

$$H_1 = \text{al menos un } \rho_{a1} \text{ es } \neq 0$$

Estadísticamente todos se deben considerar cercanos a cero.

5.10.4.1.1 Ljung-Box

La hipótesis nula

$$H_0 : \rho_1(a) = \rho_2(a) = \rho_3(a) = \dots \dots \rho_K(a) = 0$$

Se contrasta con el test

$$Q^* = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\rho}_k^2(a)}{n-k}$$

donde n es el número de observaciones usadas para estimar el modelo $n = (N-d-p)$.

El estadístico Q^* sigue aproximadamente una distribución χ^2_{k-m} donde m es el número de parámetros estimados en el modelo ARIMA($p+q$).

5.10.4.1.2 Uso de los residuales para modificar el modelo

Supongamos que se identifica y estima un modelo AR(1)

$$(1-\phi B)Z_t = b_t \quad (1)$$

Donde b_t no es RB y supongamos que la FAS de los residuos b_t tiene un coeficiente significativo seguido por el resto aproximadamente iguales a cero; esto sugiere un MA(1) para b_t

$$b_t = (1-\theta B)a_t \quad (2)$$

Donde a_t no está autocorrelacionado. Si se usa (2) para sustituir b_t en (1), el resultado es un ARMA(1,1) para Z_t

$$(1-\phi B)Z_t = (1-\theta B)a_t$$

5.10.4.2 Gráfico de los residuos contra el tiempo

Imagen 51



Imagen 52

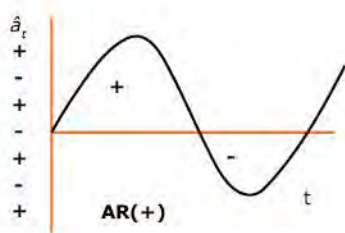
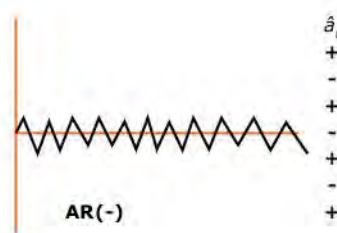


Imagen 53



5.10.4.3 Técnica de sobreestimación

$$\begin{aligned} ARMA(p, q) &\rightarrow ARMA(p+1, q) \\ &\rightarrow ARMA(p, q+1) \end{aligned}$$

Sobreestimar en la parte de media móvil

No es recomendable sobreestimarlas conjuntamente (p, q) .

5.10.5 Criterios de selección de modelos

- AKAIKE Information Criterium-AIC
- SCHWARTZ Bayesian Criterium-SBC

Cuál tiene mejor ajuste. El criterio de elección es el valor más pequeño porque representa el mejor ajuste (es parsimonioso).

Parsimonia → Explica mucho con pocas variables exógenas.

En series de tiempo, entre más variables el $\uparrow R^2$, por tanto, no es parsimonioso.

Se calculan como:

- $AIC = N \ln(SRC) + 2K$
- $SBC = N \ln(SRC) + K \ln(N)$
- $K = \text{número de parámetros estimados } p + q + cte$
- $N = \text{número de observaciones usables}$

La condición necesaria para tener como criterio de selección es que el número de observaciones para comparar sea el mismo.
 $AR(1) \rightarrow 99, AR(2) \rightarrow 98$.

Boxjenk ($AR = 1$) Z_t desde la segunda observación se estima.

Boxjenk ($AR = 2$) Z_t / residuos.

Graph 1

Z_t

Correlate (Partial = nombre de las correlaciones parciales)
 Z_t /nombre de las correlaciones simples.

Boxjenk ($AR = 1$, de $t = 1$, $MA = 1$) Z_t / residuos

Correlate (θ_{stat}) residuos

El supuesto del modelo de regresión es la estabilidad estructural, pero por un cambio exógeno cambian los parámetros.

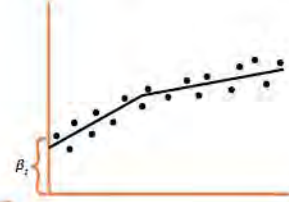
Imagen 54



Imagen 55



Imagen 56



En series de tiempo el cambio estructural también se presenta; para ello aplicar el test de Chow.

Boxjenk ($AR = 2$) Z_t / residuos.

5.11 Series de tiempo estacionales

Son aquellas series que aparte de tendencia o ciclo de larga duración, muestran fluctuaciones que se repiten anualmente.

La estacionalidad hace la serie no estacionaria porque cambia a media. Si la estacionalidad es aproximada / constante se puede eliminar tomando diferencias estacionales

Operador de
diferencia
estacional



Número de diferenciaciones
estacionales.
periodicidad de la serie
en que se repite

$$\nabla_s^D = (1 - B^s)^D$$

$$\nabla_{12}^1 Z_t = Z_t - Z_{t-12}$$

$$(1 - B^{12}) Z_t$$

Se pierden $D \times S$ observaciones

5.11.1 Forma general de un ARIMA estacional

5.11.1.1 SARIMA(p, d, q) (P, D, Q) s

$$\Phi_p(B^s)\phi_p(B)\nabla^d\nabla_s^D Z_t = \Theta_q(B^s)\theta_q(B)a_t \rightarrow \text{SARIMA}(p, d, q)(P, D, Q)s$$

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

$$\Phi_P(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps}$$

$$\Theta_Q(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs}$$

$$\nabla^d = (1 - B)^d \rightarrow \text{Operador de diferencia regular}$$

$$\nabla_s^D = (1 - B^s)^D \rightarrow \text{Operador de diferencia estacional}$$

Ejemplo:

- SARIMA(1,1,2)(2,1,1) $_4$

$$\overbrace{(1 - \phi B)}^p \underbrace{(1 - \Phi_4 B^4 - \Phi_8 B^8)}_P \overbrace{(1 - B)(1 - B^4)}^d \underbrace{Z_t}_D = \overbrace{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)}^q \underbrace{(1 - \Theta_4 B^4)}_Q a_t$$

- SARIMA(0,2,1)(2,1,2) $_{12}$

$$(1 - \Phi_{12} B^{12} - \Phi_{24} B^{24})(1 - B)^2(1 - B^{12})Z_t = (1 - \theta B)(1 - \Theta_{12} B^{12} - \Theta_{24} B^{24})a_t$$

- SARIMA(2,1,1)(1,0,2) $_s$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 - \Phi_s B^s)(1 - B)(1 - B^s)Z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_s B^s - \Theta_{2s} B^{2s})a_t$$

Operador de rezago estacional

5.11.2 Identificación de procesos estacionales

El proceso de identificación es similar al caso de procesos no estacionales. Para seleccionar los valores de D que hacen la serie estacionaria se recomienda graficar la FAS muestral de:

$$\{T(Z_t)\}, \{\nabla T(Z_t)\}, \{\nabla^2 T(Z_t)\}, \{\nabla_s T(Z_t)\}, \{\nabla \nabla_s T(Z_t)\}, \{\nabla^2 \nabla_s T(Z_t)\}$$

5.12 Predicción con modelos de series de tiempo

Lo que se busca es predecir h periodos a partir de un modelo ARMA(p, q) estimado y que tiene información disponible hasta el periodo T para la variable Z_t .

El objetivo es obtener una predicción que este lo más cerca posible al verdadero valor futuro.

Una forma de lograr este objetivo es minimizando el error cuadrático medio (ECM) entre el valor verdadero y el valor predicho basado en la información disponible hasta el periodo T .

Específicamente se busca minimizar el valor esperado.

$$E_T[(Z_{T+h} - \hat{Z}_{T+h})^2]$$

Se demuestra que el predictor \hat{Z}_{T+h} que minimiza el error cuadrático medio es la esperanza de la distribución condicionada.

$$\hat{Z}_{T+h} = E_T[Z_{T+h}]$$

5.12.1 Predicción con un modelo AR(1)

$$\hat{Z}_{T+1} = \phi_0 + \phi_1 Z_T$$

$$\hat{Z}_{T+2} = \phi_0 + \phi_1 \hat{Z}_{T+1}$$

$$\vdots$$

$$\hat{Z}_{T+h} = \phi_0 + \phi_1 \hat{Z}_{T+h-1}$$

5.12.2 Predicción con un modelo MA(1)

$$\hat{Z}_{T+1} = \mu + \theta_1 a_T$$

$$\hat{Z}_{T+2} = \mu$$

$$\vdots$$

$$\hat{Z}_{T+h} = \mu$$

5.12.3 Predicción con un modelo ARMA(1,1)

$$\hat{Z}_{T+1} = \phi_0 + \phi_1 Z_T + \theta_1 a_T$$

$$\hat{Z}_{T+2} = \phi_0 + \phi_1 \hat{Z}_{T+1}$$

$$\hat{Z}_{T+3} = \phi_0 + \phi_1 \hat{Z}_{T+2}$$

5.12.4 Varianza del error de predicción

5.12.4.1 Modelo AR(1)

$$\text{var}(\hat{a}_{t+1}) = \sigma_a^2$$

$$\text{var}(\hat{a}_{t+2}) = \sigma_a^2(1 + \phi^2)$$

.

$$\text{var}(\hat{a}_{t+h}) = \sigma_a^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots + \phi^{2(h-1)})$$

.

5.12.4.2 Modelo MA(1)

$$\text{var}(\hat{a}_{t+1}) = \sigma_a^2$$

$$\text{var}(\hat{a}_{t+2}) = \sigma_a^2(1 + \theta^2)$$

.

$$\text{var}(\hat{a}_{t+h}) = \sigma_a^2(1 + \theta^2)$$

5.12.4.3 Modelo ARMA(1,1)

$$\text{var}(\hat{a}_{t+1}) = \sigma_a^2$$

$$\text{var}(\hat{a}_{t+2}) = \sigma_a^2(\phi + \theta)^2 + 1)$$

$$\text{var}(\hat{a}_{t+3}) = \sigma_a^2(1 + (\phi + \theta)^2 + (\phi^2 + \theta^2)^2)$$

Predicción por intervalos:

$$Z_{t+h} \pm 1.96 (DS(\text{error de predicción}))$$

- Selección de modelos a partir de la predicción
- Out of sample forecasting

5.13 Predicción en series no estacionarias

$$W_t = \Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

$$Z_t = W_t + Z_{t-1}$$

$$\hat{Z}_{t+1} = \hat{W}_{t+1} + Z_t$$

$$W_t = \Delta^2 Z_t = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}$$

$$Z_t = W_t + Z_{t-1}$$

$$\hat{Z}_{t+1} = \hat{W}_{t+1} + 2Z_t - Z_{t-1}$$

$$W_t = \ln(Z_t)$$

$$\hat{Z}_{t+1} = \text{Exp}(\hat{W}_{t+1} + \frac{1}{2} \text{var}(a_{t+1}))$$

5.13.1 Raíz unitaria

Si $|\phi| = 1$, existe raíz unitaria y el proceso es no estacionario

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t \quad (1)$$

Una de las pruebas para detectar raíz unitaria es la prueba de Dickey-Fuller, quien propone los siguientes modelos:

Donde se contrasta

La $H_0: \delta = 0$ (raíz unitaria)

donde $\delta = \phi - 1$

Estas H_0 se contrastan con los valores tabulados τ_τ, τ_μ , y τ_t respectivamente.

$$\nabla Z_t = \delta Z_{t-1} + a_t \quad (2)$$

$$\nabla Z_t = \beta_1 + \delta Z_{t-1} + a_t \quad (3)$$

$$\nabla Z_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Z_{t-1} + a_t \quad (4)$$

Para proteger el modelo del problema de AR se adiciona el término ΔZ_{t-1} al lado derecho de las Ecs. A esta prueba se le llama de Dickey-Fuller aumentada (ADF).

$$\nabla Z_t = \delta Z_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla Z_{t-i} + a_t \quad (5)$$

$$\nabla Z_t = \beta_1 + \delta Z_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla Z_{t-i} + a_t \quad (6)$$

$$\nabla Z_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Z_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla Z_{t-i} + a_t \quad (7)$$

Estas Ec se contrastan con los valores tabulados τ_z , τ_μ y τ_t respectivamente.

5.13.2 Phillips-Perron

estableció una prueba para raíz unitaria con correlación serial de los errores la cual tiene en cuenta las mismas Ec de Dickey-Fuller (2), (3) y (4); solo que PP calcula unos valores Z_p y Z_t que contrastan con los valores tabulados por DF τ_z , τ_μ y τ_t respectivamente.

5.13.3 Raíces unitarias estacionales

$$\nabla Z_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \alpha_3 D_3 + \delta Z_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla Z_{t-i} + a_t$$



DF t_u

5.13.4 Perron en presencia de cambios estructurales

$$H_1: Z_t = \mu + Z_{t-1} + \gamma D_P + a_t$$

$$A_1: Z_t = \mu + \beta t + \gamma D_S + a$$

$$H_2: Z_t = \mu + Z_{t-1} + \gamma D_S + a_t$$

$$A_2: Z_t = \mu + \beta t + \gamma D_T + a_t$$

$$H_3: Z_t = \mu + Z_{t-1} + \gamma_1 D_P + \gamma_2 D_S + a_t$$

$$A_1: Z_t = \mu + \beta t + \gamma_2 D_S + \gamma_3 D_T + a_t$$

$$D_S = \begin{cases} 1 & SI \quad t \geq \tau + 1 \\ 0 & SI \quad t < \tau + 1 \end{cases}$$

$$D_P = \nabla D_S = \begin{cases} 1 & SI \quad t = \tau + 1 \\ 0 & EN OTRO CASO \end{cases}$$

$$D_T = \begin{cases} t - \tau & SI \quad t > \tau \\ 0 & EN OTRO CASO \end{cases}$$

5.13.4.1 Perron paso a paso

- Eliminar la tendencia de los datos de acuerdo con la Ha. Ejemplo bajo la especificación 1.

$$Z_t = \mu + \beta t + \gamma D_S + \hat{Z}_t$$

- Estimar la siguiente ecuación:

$$\hat{Z}_t = \phi \hat{Z}_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla \hat{Z}_{t-i} + a_t \rightarrow \text{probar RB}$$

- Calcular el t estadístico para la $H_0: \Phi = 1$

$$t = \frac{\phi - 1}{DS(\phi)}$$

- Comparar el t calculado con los valores tabulados por Perron.

5.14 Análisis de intervención

- Evento exógeno al comportamiento de la variable en estudio.
- Expresión genérica de un modelo de intervención

$$T(Z_t) = \varepsilon_{I,t} + N_t$$

$$\phi(B)\nabla^d N_t = \theta_0 + \theta(B)a_t$$

$$\delta_r(B)\nabla^b \varepsilon_{I,t} = \omega_s(B)P_{i,t}$$

$$T(Z_t) = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)\nabla^b} P_{i,t} + \frac{\theta_0 + \theta(B)a_t}{\phi(B)\nabla^d}$$

5.14.1 Análisis de intervención y función de transferencia

$$Z_t = a_0 + A(B)Z_{t-1} + C_0X_{t-b} + D(B)a_t \rightarrow \text{modelo intervención}$$

$$Z_t = a_0 + A(B)Z_{t-1} + C(B)X_t + D(B)a_t \rightarrow \text{modelo función transferencia}$$

X_t es la variable de intervención o *dummy* en la primera ecuación y sería una variable exógena en la función de transferencia.

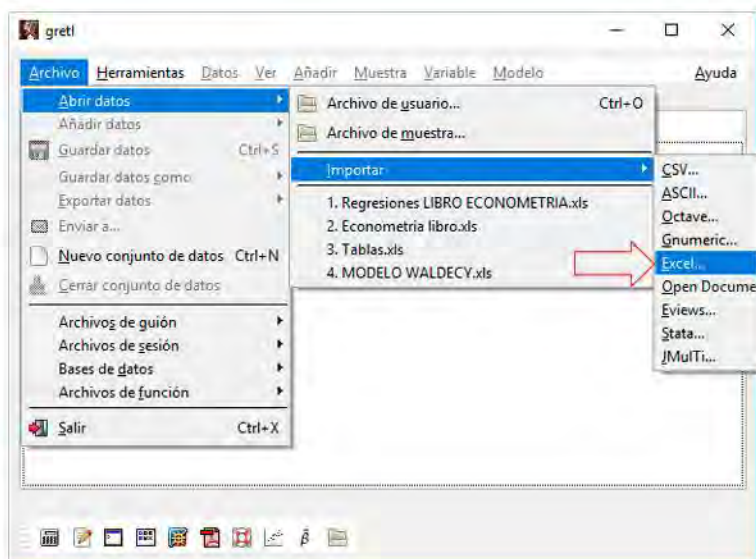
APÉNDICE 1

PAQUETE DE SOFTWARE GRETl

Gretl es un paquete de software para realizar análisis econométricos que se utiliza en varios departamentos de economía de universidades de todo el mundo. Además, es un software libre (de libre distribución y modificación bajo los términos provistos en www.gnu.org/copyleft/gpl.html). Puede descargarse de la web en la página <http://gretl.softonic.com/>

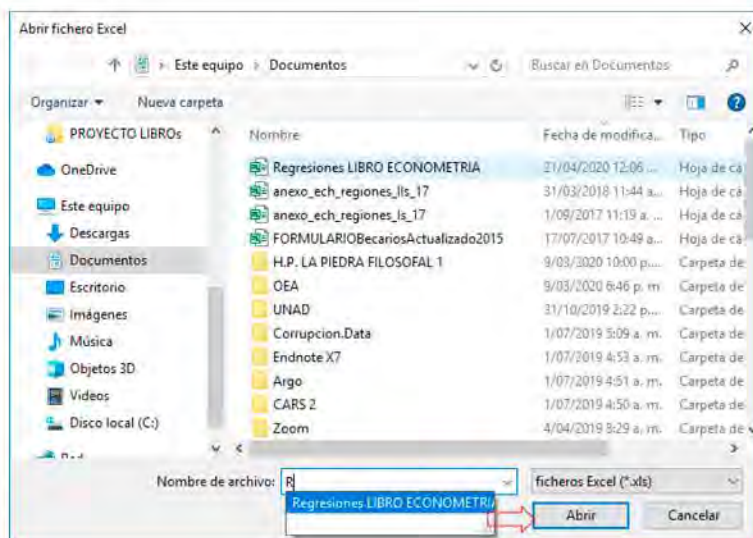
Como en la imagen 1, se debe importar el archivo, que generalmente está en formato de Excel; así mismo, es compatible con programas especializados como Eviews y Stata (programas econométricos).

Imagen 1



Inmediatamente se abre la ventana de la imagen 2, donde se debe especificar la ubicación del documento en Excel. Se recomienda dejar el documento en mis documentos o en el escritorio; de esta forma será más fácil su ubicación.

Imagen 2



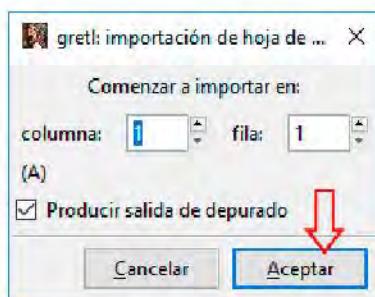
Se advierte que al momento de importar la base de datos (la cual en nuestro caso se encuentra en archivo de Excel, dado que puede estar en otro tipo de documento), el archivo de Excel debe estar cerrado.

Nótese la presentación de los datos en Excel de la imagen 3, que contiene los datos colombianos de gasto de consumo personal agregado (Y) y del Producto Interno Bruto (X). Estos deben encontrarse en la hoja de cálculo 1 e iniciar en la fila 1 y columna A sin espacios y separados por comas, no puntos. De esta forma se importan los datos en la nueva ventana de la imagen 4.

Imagen 3

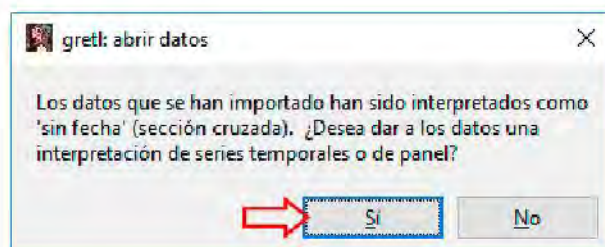
	A	B	C
1	Año	Y	X
2	2005	151.476	182.228
3	2006	161.161	205.836
4	2007	172.738	231.215
5	2008	179.775	257.229
6	2009	181.466	271.379
7	2010	190.805	293.773
8	2011	203.377	334.297
9	2012	214.144	360.131
10	2013	222.684	385.951
11	2014	232.983	412.602
12	2015	240.188	435.202
13	2016	243.992	467.160
14	2017	249.031	497.669
15	2018	257.779	529.191
16			

Imagen 4



Recordemos que los datos que se están trabajando son un ejemplo de series de tiempo.

Imagen 5



Como la estructura del conjunto de datos es de series de tiempo con periodicidad anual, pulsamos en la ventanilla abierta \Rightarrow Adelante, como en la figura 6 y se abre la ventanilla de frecuencia de las series temporales. Elegimos • Anual y pulsamos \Rightarrow Adelante, como en la figura 7.

*seleccionamos Serie temporal
y pulsamos \Rightarrow Adelante*

Imagen 6

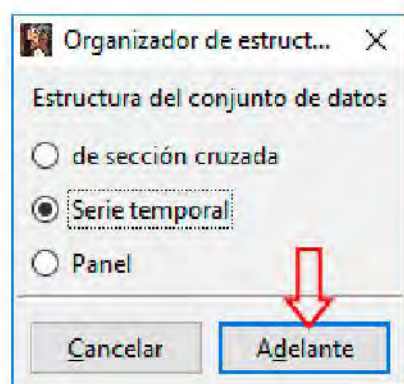
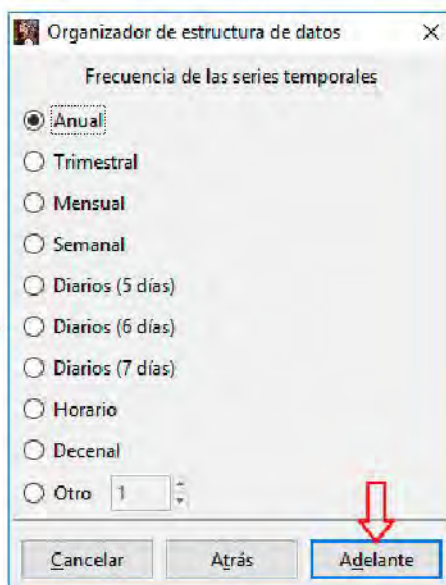
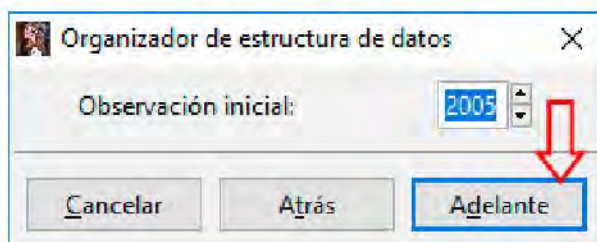


Imagen 7



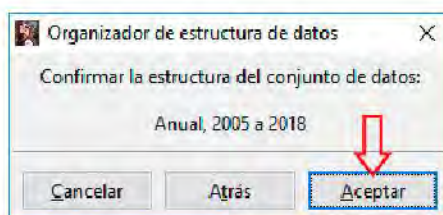
Definimos el inicio de la serie de tiempo de 2005 a 2018

Imagen 8



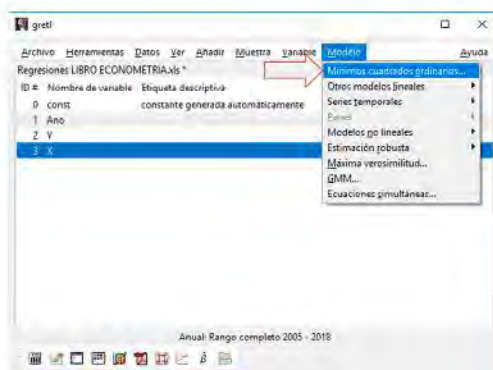
Se confirma la estructura del conjunto de datos en la ventana de la imagen 9.

Imagen 9



Como es un modelo lineal y uniecuacional, la regresión lineal la realizamos por el método de mínimos cuadrados ordinarios -MCO, el cual se aprecia en la imagen 10; esta acción la podemos realizar por la opción Modelo, o entrar por la opción $\hat{\beta}$.

Imagen 10

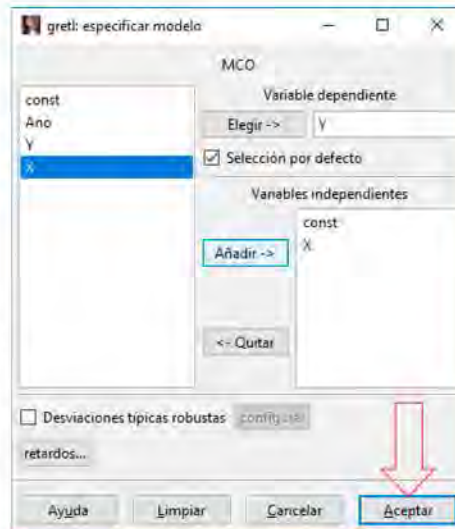


Inmediatamente se abre la ventanilla de la imagen 11, donde especificamos que la variable dependiente es Y y las variables independientes X (gasto de consumo personal agregado y el PIB, respectivamente, para este ejercicio). Al cargar la base de datos, todas las variables se aprecian al lado izquierdo de la ventanilla, donde se selecciona la variable a *Elegir* ->, como variable dependiente, procedimiento para seguir con cada una de las variables a *Añadir* ->, como variables independientes y debido a que el modelo genera automáticamente el coeficiente del intercepto o constante; dado el caso posible de estimar un modelo que no posea este coeficiente, subrayamos (*const*) y seleccionamos la opción *Quitar* ->. Finalmente, Aceptar.

Imagen 11

$$y = 0,3113x + 99100$$

$$R^2 = 0,989$$



La ventanilla que aparece en la imagen 12 es la estimación del modelo 1, donde obtenemos la constante estimada $= \hat{\beta}_1 = 99099,6$ y la pendiente $= \hat{\beta}_2 = \text{PMC} = 0,31$. Nótese el $R^2 = 0,98$, excelente; sin embargo, estas interpretaciones se tratan en el capítulo 4.

Así mismo, para graficar la línea de regresión obtenida al estimar (imagen 13), elegimos la opción gráfico, gráfico de variable estimada y observada, contra el PIB, en la ventanilla de la imagen 12. (gráfica realizada en Excel en el Apéndice 2).

Imagen 12

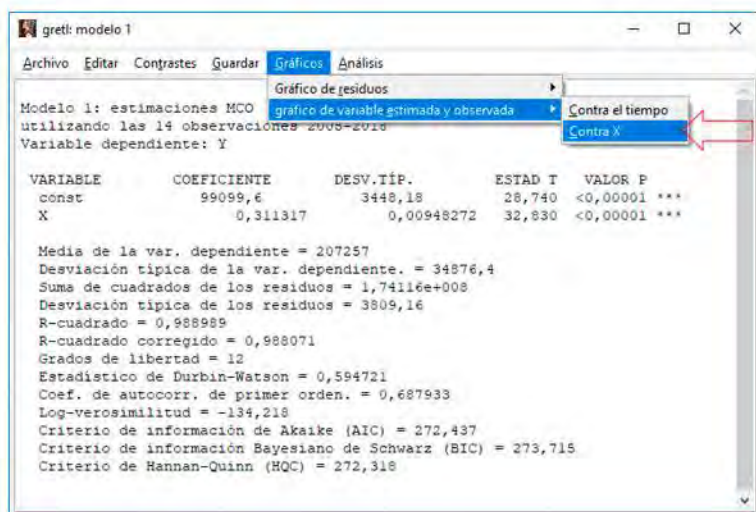
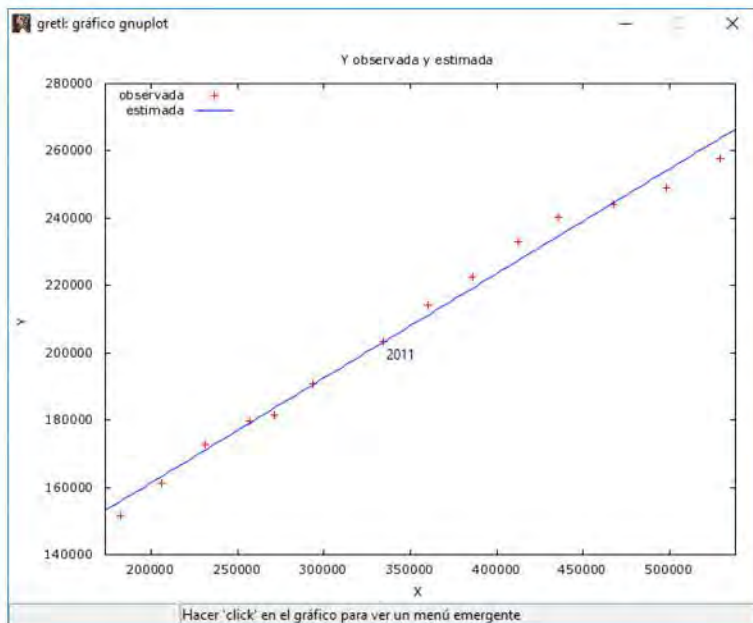


Imagen 13

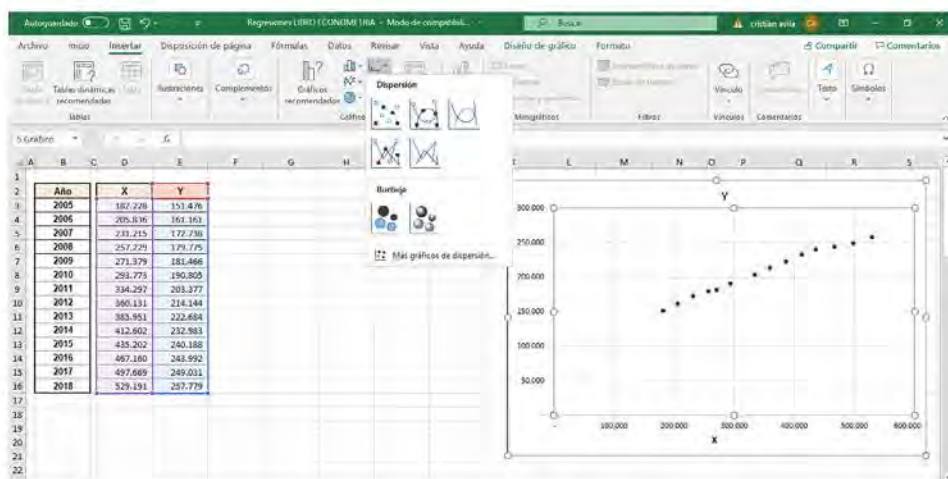


APÉNDICE 2

GRAFICAR UN DIAGRAMA DE DISPERSIÓN

Para graficar un *diagrama de dispersión* se transportan los datos a Excel como la imagen 1; para ello, se intercambian las columnas (Y y X); la primera es la variable explicativa (X) y luego la variable endógena (Y); luego se seleccionan con el cursor, se elige la ventana *Insertar* y pulsamos *Dispersión*.

Imagen 1



Con el cursor nos paramos en la gráfica, aparece una nueva barra de herramientas, pulsamos diseño y elegimos fx.

Imagen 2

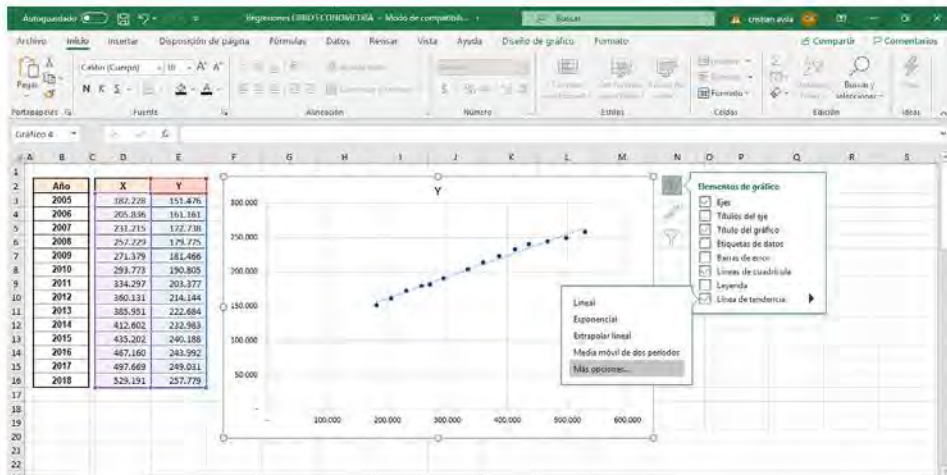
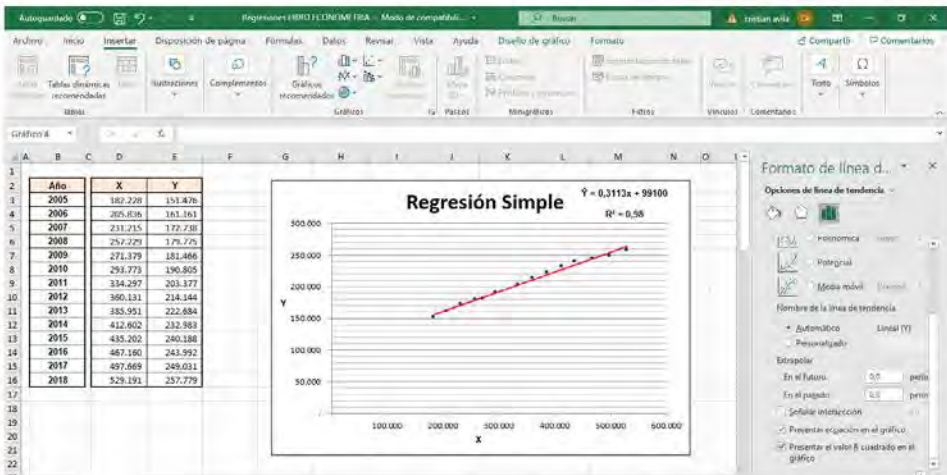


Imagen 3

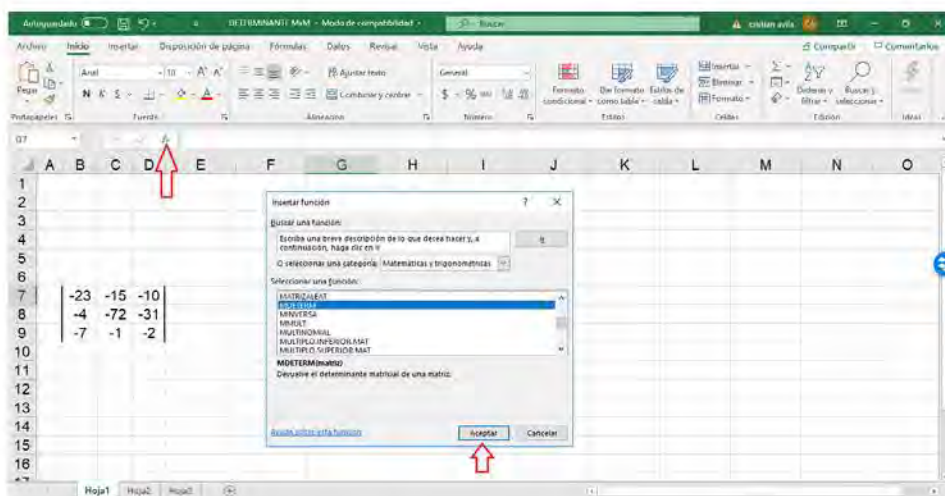


APÉNDICE 3

DETERMINANTE

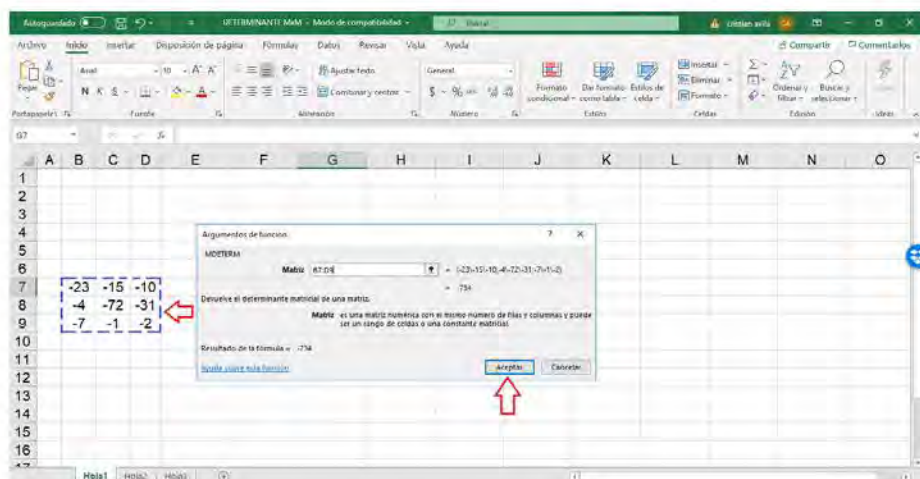
Después de digitar en Excel la matriz respectiva, se abre el formato de fórmulas, ya sea en **fx**, donde está la flecha (véase la imagen 1) o por la barra de herramientas insertar = función... = seleccionando MDETERM + Aceptar.

Imagen 1



Inmediatamente se abre una ventanilla donde se debe seleccionar con el cursor la matriz para determinar; en nuestro ejemplo B7:D9 + aceptar (véase la imagen 2).

Imagen 2



Se obtiene el Determinante - 743

Inversa

Después de comprobar que nuestra matriz tiene como determinante -743, es decir que tiene inversa, en fx función seleccionamos la categoría Matemáticas y trigonometría y elegimos la opción MINVERSA (véase la imagen 3).

Imagen 3

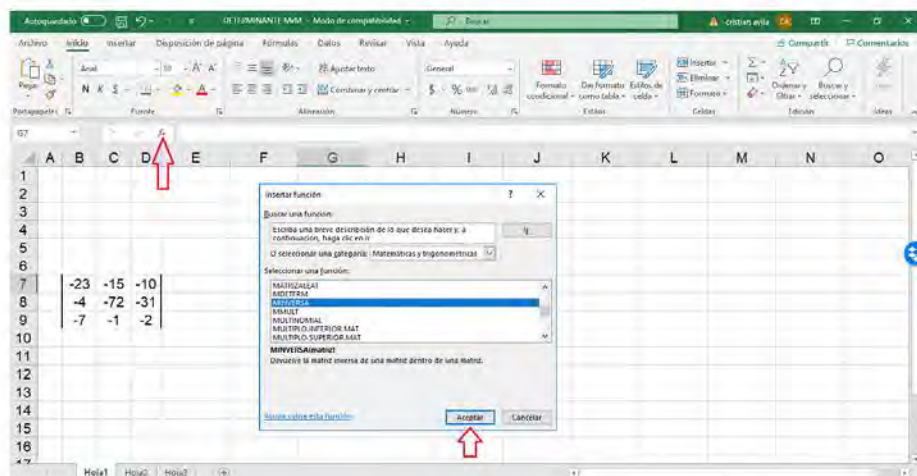


Imagen 4



APÉNDICE 4

OPERACIONES DEL PRIMER EJEMPLO DEL CAPÍTULO 4.

Transponer

Imagen 1



Imagen 2

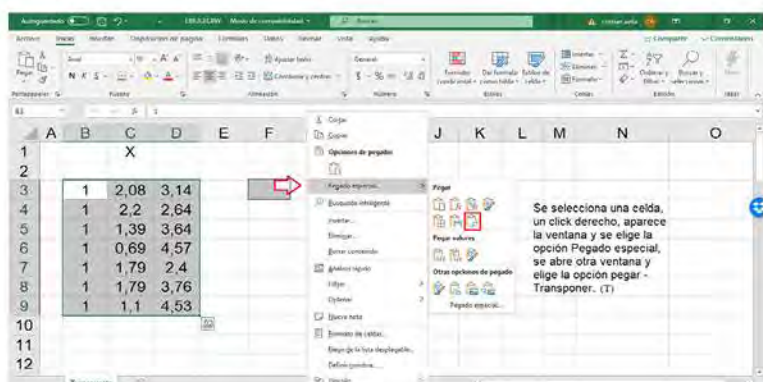


Imagen 3

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1			X						X'						
2															
3		1	2,08	3,14			1	1	1	1	1	1			
4		1	2,2	2,64			2,08	2,2	1,39	0,69	1,79	1,79	1,1		
5		1	1,39	3,64			3,14	2,64	3,64	4,57	2,4	3,76	4,53		
6		1	0,69	4,57											
7		1	1,79	2,4											
8		1	1,79	3,76											
9		1	1,1	4,53											

A yellow box labeled "Traspuesta de X" is placed below the matrix X. The status bar at the bottom indicates "Traspuesta".

Imagen 4

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1					X'														
2							x												
3																			
4																			
5																			
6																			
7																			
8																			
9																			
10																			
11																			
12																			
13																			
14																			
15																			

The matrix X' is in columns E-I, rows 3-9. The matrix x is in columns J-L, rows 3-9. The matrix Y is in columns M-O, rows 3-9. The result of the multiplication is shown in columns P-Q, rows 3-9. A yellow box labeled "X' x Y = Y * Y'" is placed below the matrix X'. The status bar at the bottom indicates "Traspuesta".

An "Insertar función" (Insert Function) dialog box is open, showing the "MMULT" (matrix multiplication) function selected. The dialog box has buttons for "Aceptar" (Accept) and "Cancelar" (Cancel).

Imagen 5

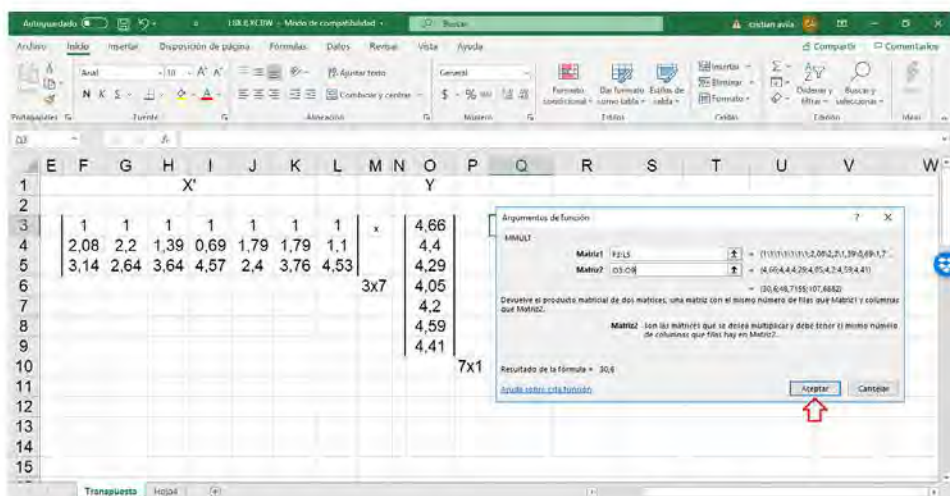
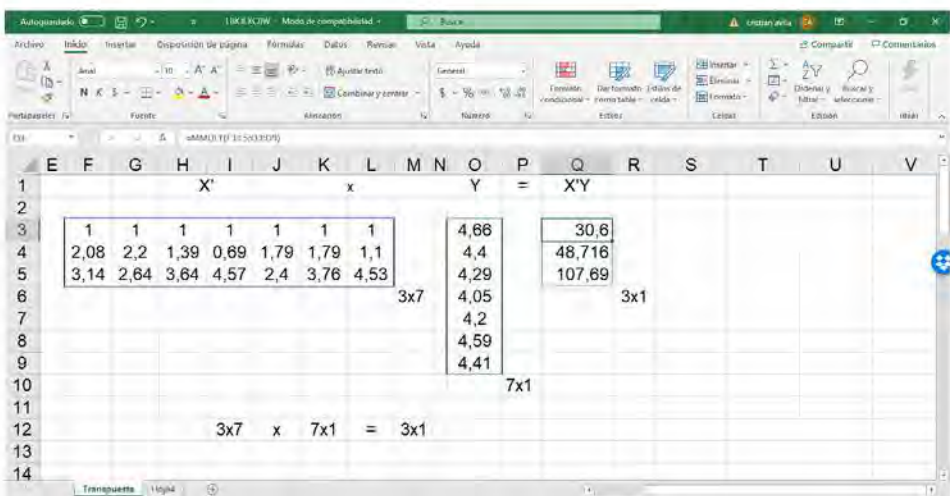


Imagen 6



Inicialmente se subraya el área exactamente proporcional al resultado de la inversa; es decir, si la matriz inicial es del orden 2x2, la matriz inversa es 2x2, por tanto el área para subrayar es de 2 líneas por 2 columnas. Para nuestro ejercicio es de 3x3, por tanto subrayamos con el cursor el mismo espacio donde queremos sea arrojado el resultado H12:J14 y elegimos en *fx función* la opción MINVERSA y en la ventanilla que se abre seleccionamos B12:D14 + Aceptar. Luego presionamos f2 y en conjunto ctrl. + Mayúscula + Enter.

Imagen 7

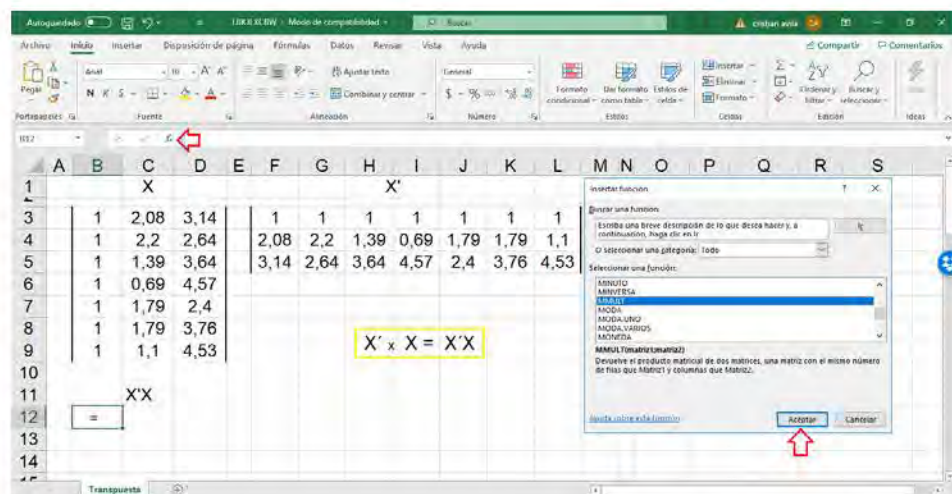


Imagen 8

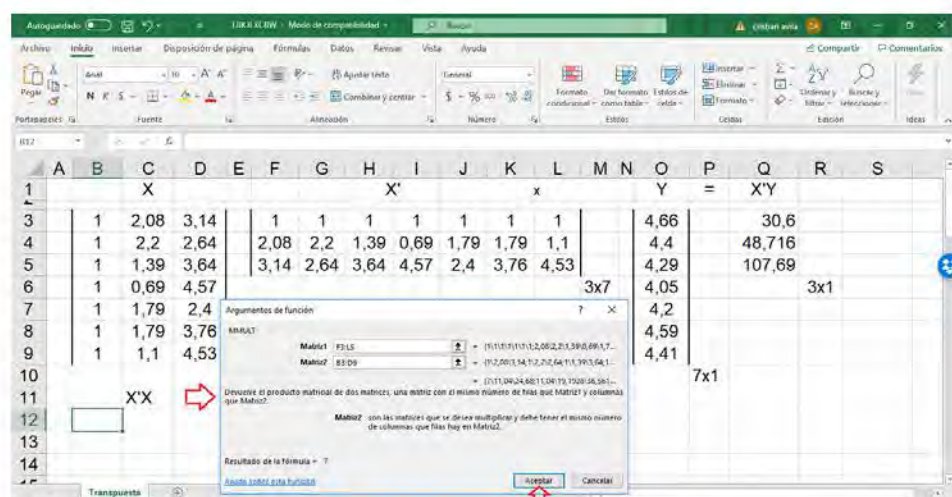


Imagen 9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1			X					X'			x				Y	=	X*Y		
3		1	2,08	3,14		1	1	1	1	1	1	1			4,66		30,6		
4		1	2,2	2,64		2,08	2,2	1,39	0,69	1,79	1,79	1,1			4,4		48,716		
5		1	1,39	3,64		3,14	2,64	3,64	4,57	2,4	3,76	4,53			4,29		107,69		
6		1	0,69	4,57											4,05			3x1	
7		1	1,79	2,4											4,2				
8		1	1,79	3,76											4,59				
9		1	1,1	4,53											4,41				
10																7x1			
11			X*X																
12		7	11	24,7						3x7	x	7x1	=	3x1					
13		11	19,2	36,6															
14		24,7	36,6	91,4															

Imagen 10

Autoguardado [nombre de archivo] - Libro1 - Excel - Microsoft Excel

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

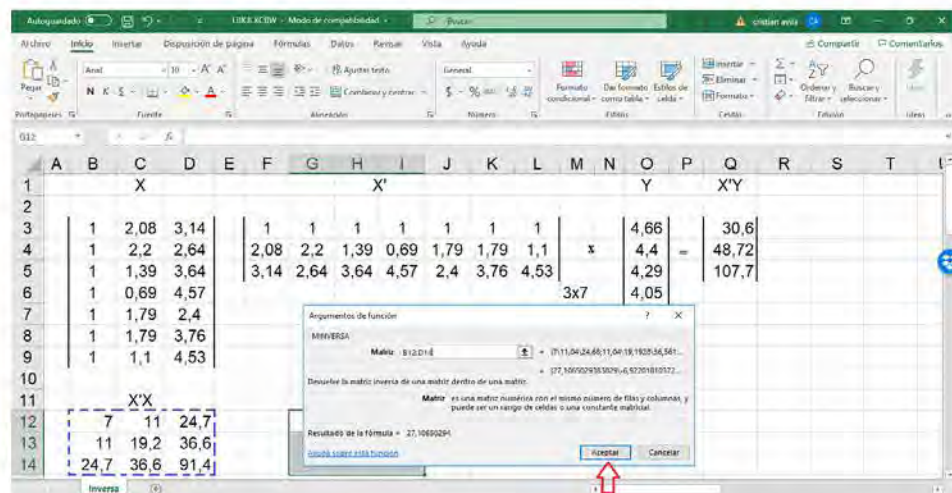
Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda

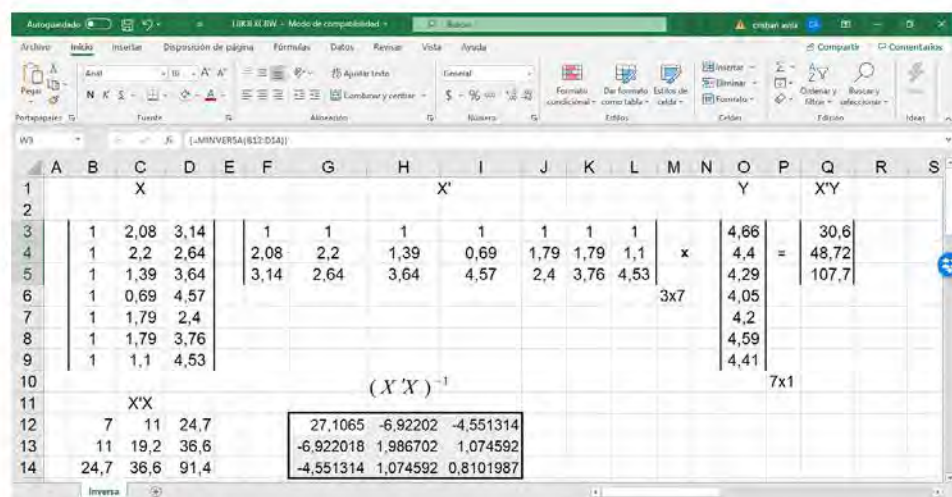
Inicio Insertar Disposición de página Fórmulas Datos Referencias Ayuda</

Imagen 11



Y obtenemos la inversa:

Imagen 12



Ahora, obtenida la matriz inversa, estimamos los betas:

Imagen 13

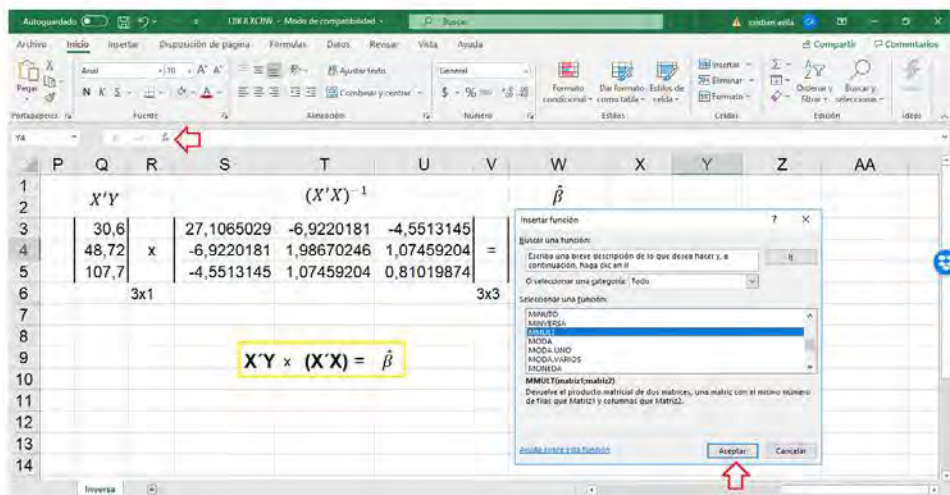


Imagen 14

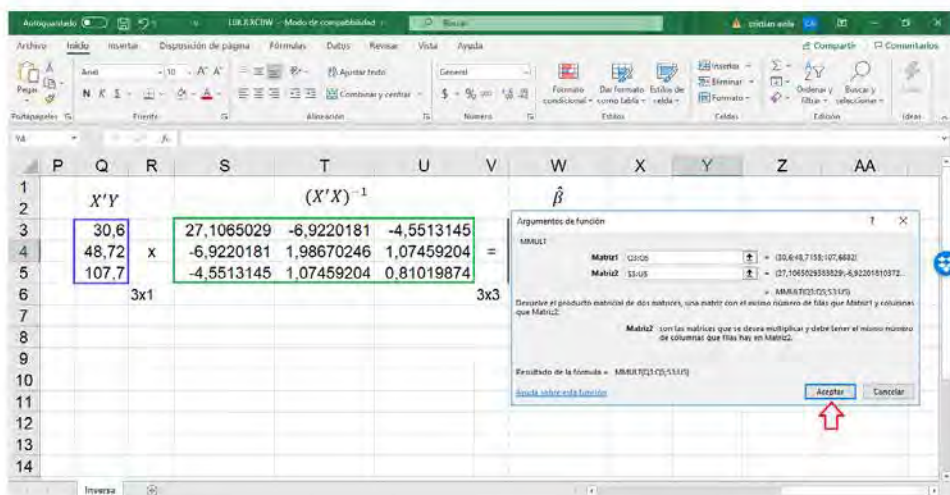


Imagen 15

Excel screenshot showing the calculation of $\hat{\beta}$ using the formula $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$. The formula bar shows `=MMULT(S3:U5;Q3:Q5)`.

	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												

Matrix $X'Y$ (3x1):

30,6
48,72
107,7

Matrix $(X'X)^{-1}$ (3x3):

27,1065029	-6,9220181	-4,5513145
-6,9220181	1,98670246	1,07459204
-4,5513145	1,07459204	0,81019874

Result $\hat{\beta}$ (3x1):

2,12655589
0,69033233
0,32791085

Imagen 16

Excel screenshot showing the calculation of STC , SEC , and SRC , and the derivation of the total sum of squares equation.

	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												

Matrix $X'Y$ (3x1):

30,6
48,72
107,7

Matrix $(X'X)^{-1}$ (3x3):

27,1065029	-6,9220181	-4,5513145
-6,9220181	1,98670246	1,07459204
-4,5513145	1,07459204	0,81019874

Result $\hat{\beta}$ (3x1):

2,12655589
0,69033233
0,32791085

Text:

asi sucesivamente hallamos la STC , la SEC y la SRC .

Equations:

$$STC = Y'Y - n\bar{Y}^2$$

$$SEC = \hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2$$

$$STC = SEC + SRC$$

$$STC - SEC = SRC$$

$$Y'Y - n\bar{Y}^2 - \hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2 = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$$

ANEXO 1

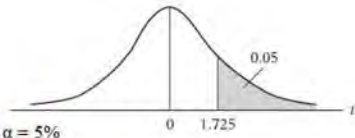
TABLA T DE DISTRIBUCIÓN

Puntos porcentuales de la distribución t

Ejemplo:
 $\Pr(t > 2.086) = 0.025$
 $\Pr(t > 1.725) = 0.05$
 $\Pr(|t| > 1.725) = 0.10$

para $gl = 20$

$\alpha = 5\%$



grados de libertad

Pr gl	0.25 0.50	0.10 0.20	0.05 0.10	0.025 0.05	0.01 0.02	0.005 0.010	0.001 0.002
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579

Tomado de: Gujarati (2010) únicamente con fines explicativos.

ANEXO 2

TABLA F DE DISTRIBUCIÓN

Puntos porcentuales
superiores de la distribución F

Ejemplo:

$$\Pr(F > 1.59) = 0.25$$

$$\Pr(F > 2.42) = 0.10 \quad \text{para gl } N_1 = 10$$

$$\Pr(F > 3.14) = 0.05 \quad \text{y } N_2 = 9$$

$$\Pr(F > 5.26) = 0.01$$



gl para el denominador N_2	gl para el numerador N_1												
	Pr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	.25	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.36	9.41
	.10	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	60.5	60.7
	.05	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	.25	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.39
	.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41
	.05	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3	.25	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.45
	.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.22
	.05	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74
4	.25	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90
	.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
5	.25	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89
	.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27
	.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.71	4.68
	.01	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89

Tomado de: Gujarati (2010) únicamente con fines explicativos.

BIBLIOGRAFÍA

- Cramer, J. S. (1969). *Empirical econometrics*. North-Holland, Amsterdam.
- Chiang, A. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*. Nueva York, Estados Unidos: McGraw-Hill.
- Gujarati, D. (2006). *Essentials of Econometrics*. Nueva York, Estados Unidos: McGraw-Hill.
- Gujarati, D y Porter, D. (2010). *Econometría*. México: McGraw-Hill.
- Pindyck, R. y Rubinfeld, D. (2001). *Econometría: modelos y pronósticos*. México: McGraw-Hill.
- Wei, William. (1990). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. Estados Unidos.
- Wooldridge, J. (2000). *Introductory Econometrics*. Estados Unidos: South-Western College Publishing.